Algebra2
Obligatorisk opgave

Anders "Bongo" Bjerg Pedersen, 070183
Eksamensnummer 45

23. maj 2005

Opgave 1

a)

Vi har:

$$\sigma = \sigma^{6-5} = (\sigma^3)^2 \cdot (\sigma^5)^{-1} = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)(8\ 7\ 6).$$

b)

Ordnen af en p-cykel er (jfr. 2.18) $(-1)^{p-1}$, dvs. ordnen af σ er:

$$\text{sign}((1\ 3\ 5\ 2\ 4)(8\ 7\ 6)) = (-1)^4(-1)^2 = 1.$$

Altså er σ en lige permutation.

c)

Lagranges Indexsætning giver os:

$$|A_8| = |A_8 : \langle\sigma\rangle| \cdot |\langle\sigma\rangle| \Rightarrow |A_8 : \langle\sigma\rangle| = \frac{|A_8|}{|\langle\sigma\rangle|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8!}{|\sigma|} = \frac{20160}{15} = 1344.$$

Altså er index af $\langle\sigma\rangle$ i A_8 lig med 1344.

Opgave 2

a)

Lad G være en gruppe af orden 1000. Da er $G \cong C_8 \times C_{125}$, da $(8, 125) = 1$ og G er kommutativ (jfr. 6.11). $C_8 \times C_{125}$ har netop 4 elementer af orden 10, da C_8 har et element af orden 2, og C_{125} har 4 elementer af orden 5, og $mfm(2, 5) = 10$, og da hverken C_8 eller C_{125} har elementer af orden 10, er der ingen andre muligheder for tal, hvis $mfm = 10$.
Da mindste fælles multiplum af 8 og 125 er 1000, findes det et element $g \in C_{1000}$: $|g| = 1000$, dvs. $\langle g\rangle$ frembringer hele C_{1000}, som derfor er cyklisk.

b

Se på gruppen $H := C_2 \times C_4 \times C_5 \times C_{25} \cong C_{1000}$. Da C_{1000} er cyklisk og kommutativ, er H det også, da de to grupper er isomorfe. Derudover er der netop 72 elementer af orden 10 i H.

Opgave 3

Vi primtalsfaktoriserer: $864 = 2^5 \cdot 3^3$. Med summer af positive hele tal kan primeksponenten

$$\left.\begin{array}{l}\text{5 skrives på 7 måder}\\ \text{3 skrives på 3 måder}\end{array}\right\} = 7 \cdot 3 = 21 \text{ grupper af orden } 864.$$

Opgave 4

Idet G er cyklisk, eksisterer et element $g \in G$, der frembringer hele G, dvs. $\langle g \rangle = G$, og vi skal så vise, at der findes et element i G', der frembringer hele G'.
Lad $h' \in \varphi(G)$. Vi har så, at $h' = \varphi(h)$ for $h \in G$. Da G er cyklisk, findes et $n \in \{1, 2, ..., |G|\}$, så $h = g^n$, og dermed har vi

$$h' = \varphi(g^n) = \varphi(g)^n$$

Altså er $\varphi(g)$ frembringer for G', som dermed er cyklisk.

Opgave 5

Isomorfisætningen siger, at følgende isomorfi findes:

$$C_{28}/\varphi^{-1}(id) \xrightarrow{\sim} \varphi(C_{28})$$

og vi kan så bruge Lagranges indexsætning til at bestemme:

$$|C_{28}| = |C_{28}\varphi^{-1}(id)| \cdot |\varphi^{-1}(id)| \Rightarrow 28 = d \cdot |\varphi^{-1}(id)|$$

Altså må d være divisor i 28.

$\varphi(C_{28})$ ligger i A_5, altså ved vi, at $7 \mid d \Leftrightarrow 7 \mid |A_5|$.
$|A_5| = \frac{1}{2}5! = 60$, $7 \nmid 60$ og altså $7 \nmid d$.
Vis $d \neq 4$. Bemærk $\varphi(C_{28})$ cyklisk. Hvis $d = 4$ ville $\varphi(C_{28})$ da indeholde et element af orden 4. Men da $\varphi(C_{28})$ ligger i A_5 eksisterer et sådan element ikke da A_5 ikke indeholder nogen 4-cykler. Følgende er $d \neq 4$.
Da $d \mid 28$ kan d være 14, 7, 4, 2 eller 1. Da $7 \nmid d$ kan d kun være 4,2 eller 1. Da $d \neq 4$ og vi ved at $d \neq$ kan vi slutte at $d = 2$.
Vis at der er 15 ikke-trivielle homomorfier $C_{28} \to A_5$. Da $n = 2$ bemærker vi at der er 15 elementer af orden 2 i A_5, nemlig de elementer med cykeltype 2^2. For hver af disse har vi en ikke-triviel homomorfi.

Opgave 6

a)

σ har cykeltype $1^1 5^1$. Denne type er der i S_6 (jfr. GRP7, opg. 11)

$$\frac{6!}{1 \cdot 5 \cdot (1!) \cdot (1!)} = \frac{6!}{5} = 143$$

af. Der er altså (ifølge 7.18) 143 permutationer, der er konjugerede med σ (hvis man tæller σ selv med).

b)

Vi skal bestemme antallet af elementer i centralisatoren for σ:

$$C(\sigma) = \{g \in S_6 \mid g\sigma g^{-1} = \sigma\}$$

Disse er ifølge 7.17 alle de permutationer i S_6, der kommuterer med σ, og sidste del af beviset for 7.18 giver os en metode til at finde disse. Lad $g \in S_6$:

$$\begin{aligned}
g\sigma g^{-1} &= (g(\sigma_1)\ g(\sigma_2)\ g(\sigma_3)\ g(\sigma_4)\ g(\sigma_5)) = \sigma \\
g\sigma g^{-1} &= (g(\sigma_5)\ g(\sigma_1)\ g(\sigma_2)\ g(\sigma_3)\ g(\sigma_4)) = \sigma \\
g\sigma g^{-1} &= (g(\sigma_4)\ g(\sigma_5)\ g(\sigma_1)\ g(\sigma_2)\ g(\sigma_3)) = \sigma \\
g\sigma g^{-1} &= (g(\sigma_3)\ g(\sigma_4)\ g(\sigma_5)\ g(\sigma_1)\ g(\sigma_2)) = \sigma \\
g\sigma g^{-1} &= (g(\sigma_2)\ g(\sigma_3)\ g(\sigma_4)\ g(\sigma_5)\ g(\sigma_1)) = \sigma
\end{aligned}$$

Vi indsætter nu for at finde de med σ konjugerede permutationer:

$$\begin{aligned}
(g_1(2)\ g_1(3)\ g_1(4)\ g_1(5)\ g_1(6)) = (23456) \quad &\Rightarrow \quad g_1 = id \\
(g_2(6)\ g_2(2)\ g_2(3)\ g_2(4)\ g_2(5)) = (23456) \quad &\Rightarrow \quad g_2 = (23456) \\
(g_3(5)\ g_3(6)\ g_3(2)\ g_3(3)\ g_3(4)) = (23456) \quad &\Rightarrow \quad g_3 = (24635) \\
(g_4(4)\ g_4(5)\ g_4(6)\ g_4(2)\ g_4(3)) = (23456) \quad &\Rightarrow \quad g_4 = (25364) \\
(g_5(3)\ g_5(4)\ g_5(5)\ g_5(6)\ g_5(2)) = (23456) \quad &\Rightarrow \quad g_5 = (26543)
\end{aligned}$$

Vi får så, at elementerne i centralisatoren for σ er:

$$C(\sigma) = \{id, (23456), (24635), (25364), (26543)\}$$

Opgave 7

Kleins Vierergruppe, V, er $C_2 \times C_2$, der har orden 4. Vi viser implikationen begge veje.

$\Leftarrow$: Lad n være lige og se på gruppen $G := \{id, D^{\frac{n}{2}}, S, D^{\frac{n}{2}}S\}$. G er en undergruppe af D_n af orden 4, og vi konstruerer nu en afbildning, $\varphi : C_2 \times C_2 \to G$ som følger:

$$\begin{gathered}(1,1) \to id \\ (-1,1) \to S \\ (-1,-1) \to D^{n/2}S \\ (1,-1) \to D^{n/2}\end{gathered}$$

Denne afbildning er bijektiv og klart en homomorfi, idet $1_V \to 1_G$, og for alle elementer $a, b \in V$ gælder, at $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Altså er φ en isomorfi.

$\Rightarrow$: Lad V være isomorf med en undergruppe H af D_n. Da er V's orden lig H's orden, som er divisor i D_n's orden, og vi har:

$$|V| \mid |H| \Leftrightarrow 4 \mid 2n \Leftrightarrow n \text{ er lige.}$$

Altså har vi vist implikationen begge veje.

Opgave 8

Vi finder isomorfier for de forskellige grupper:

$$\begin{aligned}
&G_1 = C_2 \times C_{10} \times C_{100} \cong C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_4 \times C_{25} \\
&G_4 = C_4 \times C_2 \times C_5 \times C_2 \times C_{25} \cong C_4 \times C_2 \times C_5 \times C_2 \times C_{25} \\
&G_2 = C_4 \times C_4 \times C_{125} \\
&G_5 = C_4 \times C_4 \times C_5 \times C_{25} \\
&G_3 = C_4 \times C_5 \times C_{100} \cong C_4 \times C_5 \times C_4 \times C_{25} \\
&G_6 = C_4 \times C_{500} \cong C_4 \times C_4 \times C_5 \times C_{25}
\end{aligned}$$

Vi har altså, at

$$G_1 \cong G_4 \quad , \quad G_3 \cong G_5 \quad , \quad G_3 \cong G_6 \quad , \quad G_5 \cong G_6$$

Hvilket vil sige parrene (1,4), (3,5), (3,6), (5,6).

Opgave 9

a)

Vi bestemmer isotropigruppen for vektoren $x = (1, 0, 1, 0)$:

$$\begin{aligned}
C(x) &= \{\sigma \in S_4 \mid \sigma x \sigma^{-1} = x\} \\
&= \{id, (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3), (2\ 4)\} = S_{\{1,3\}} \times S_{\{2,4\}}.
\end{aligned}$$

b)

Vi bestemmer nu banen igennem x, dvs. mængden af permutationer af koordinaterne i x (der er $3! = 6$ stk.):

$$\begin{aligned} G.x &= \{\sigma.x \mid \sigma \in S_4\} \\ &= \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0)\} \end{aligned}$$

c)

Vi skal angive en vektor i $\mathbb{R}^4$, hvis isotropigruppe har orden 2, dvs. hvis centralisator har 2 elementer. Vektoren $y = (0,0,1,2)$ har centralisator $C(y) = \{id, (1\ 2)\}$ og opfylder derfor kravene.

Opgave 10

Symmetrigruppen er D_8. Vi opskriver de forskellige elementer i D_8, deres typer og antallet af baner:

g	type	$m(g)$
id	1^8	8
D	8^1	1
D^2	4^2	2
D^3	8^1	1
D^4	2^4	4
D^5	8^1	1
D^6	2^4	2
D^7	8^1	1
S	$1^2 2^3$	5
DS	2^4	4
D^2S	1^2	5
D^3S	2^4	4
D^4S	$1^2 2^3$	5
D^5S	2^4	4
D^6S	$1^2 2^3$	5
D^7S	2^4	4

Vi anvender nu Polyas formel til at bestemme antallet af perlekæder med $N = 2$ farver perler:

$$\sharp = \frac{1}{|D_8|} \sum_{g \in D_8} N^{m(g)} = \frac{1}{16}(4N + 2N^2 + 5N^4 + 4N^5 + N^8) = 30.$$

Opgave 11

Opgaven besvares nogenlunde som opgave 10 dog med symmetrigruppe C_8 i stedet for D_8, og vi får så følgende skema:

g	$type$	$m(g)$
id	1^8	8
D	8^1	1
D^2	4^2	2
D^3	8^1	1
D^4	2^4	4
D^5	8^1	1
D^6	2^4	2
D^7	8^1	1

Derefter anvendes igen Polyas formel til bestemmelse af antallet af karusseller med $N = 2$ forskellige (træ-)heste at vælge imellem:

$$\sharp = \frac{1}{|C_8|} \sum_{g \in C_8} N^{m(g)} = \frac{1}{8}(4N + 2N^2 + N^4 + N^8) = 36.$$

Opgave 12

Vi primfaktoriserer og finder de forskellige grupper:

$358 = 2 \cdot 179$	D_{179} , C_{358} , $C_2 \times C_{179}$	dvs. 3 grupper af orden 358.
359 (primtal)	C_{359}	dvs. 1 gruppe af orden 359.
$361 = 19^2$	C_{361} , $C_{19} \times C_{19}$ (da $\|G\| = p^2 \Rightarrow C_p$, C_{p^2})	dvs. 2 grupper af orden 364.
$365 = 5 \cdot 73$	C_{365} (jfr. 8.11)	dvs. 1 gruppe af orden 365.

Opgave 13

Lad G være en simpel gruppe med $|G| = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.
G simpel$\Rightarrow$ G har ingen normale undergrupper$\Rightarrow$der findes mindst 2 af hver Sylow-p-undergruppe.
Sylow-2 og Sylow-3-undergrupperne er uinteressante, da de ikke kan indeholde elementer af orden 11. Vi leder derfor efter antallet af Sylow-11-undergrupper (som vi fra Sylows sætninger ved eksisterer). Antallet er divisor i 660. dvs er en af følgende:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 30, 33, 44, 55, 60, 66, 110, 132, 165, 220, 330, 660.$$

Heraf er 1 og 12 kongruente med 1 modulo 11. Der er altså 12 Sylow-11-undergrupper (da der er mindst 2 af hver Sylow-p-undergruppe). Hver af disse grupper er cykliske og har orden 11, og ethvert element $g \neq e$ i Sylow-11-undergrupperne har $|g| = 11$ (jfr. 4.8).
Der er altså i alt $12 \cdot 10 = 120$ elementer i G af orden 11.

Opgave 14

Vi skal altså finde en afbildning $\varphi : \mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/4$, med en cyklisk kerne af orden 4. Homomorfiegenskaben fortæller os at φ er fastlagt ved $\varphi(1,0)$ og $\varphi(0,1)$, og vi definerer derfor φ, så $\varphi(1,0) = 1$ og $\varphi(0,1) = 0$. Så får vi kernen til at være

$$\{(0,0),(0,1),(4,0),(4,1)\}$$

ved triviel udregning, som er isomorf med $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Definer nu en ny afbildning $\psi : \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/4$ ved $\psi(1,0) = 1$ og $\varphi(0,1) = 2$. Vi får så kernen

$$\{(0,0),(4,0),(2,1),(6,1)\}$$

ved triviel udregning (eksempelvis bliver $(2,1) \to 2\cdot\psi(1,0)+\psi(0,1) = 2+2=4=0$), som er isomorf med $\mathbb{Z}/4$ (den er cyklisk og har orden 4). Altså har vi vist, at begge muligheder kan forekomme (ved hhv. φ og ψ som mulige afbildninger).

Opgave 15

a)

Afbildningen er veldefineret, idet hvis a er primisk med n, da er a også primisk med d.

b)

Antag $n = pd$ for et primtal p, ellers indskydes blot en passende mellemgruppe. Antag $p \mid d$. Lad $[a]_d \in (\mathbb{Z}/d)^*$, da vil enten $[a]_n$ eller $[a+d]_n$ ligge i $(\mathbb{Z}/d)^*$. Vi har da, at hvis $[a]_n \in (\mathbb{Z}/d)^*$, så er $\varphi([a]_n) = [a]_d$
Hvis $[a+d]_n \in (\mathbb{Z}/d)^*$, så er $\varphi([a+d]_n) = [a]_d$
Derfor er φ surjektiv.

c)

Vi definerer en ny surjektiv gruppehomomorfi:

$$\phi : \mathbb{Z}/2000 \to \mathbb{Z}/5$$

Isomorfisætningen kan nu anvendes på denne afbildning:

$$(\mathbb{Z}/2000)^*/\phi^{-1}([0]) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/5)^*$$

Antallet af restklasser $[a]_{2000}$ modulo 2000, hvor $a \equiv 1 \ (mod\ 5)$ må være ordenen af kernen for denne afbildning, som vi finder vha. af Lagranges Indexsætning, idet φ er Eulers φ-funktion, defineret i 1.12:

$$|(\mathbb{Z}/2000)^*/\phi^{-1}([0])| = |(\mathbb{Z}/5)^*| \Rightarrow |(\mathbb{Z}/2000)^*| = |\phi^{-1}([0])|\cdot|(\mathbb{Z}/5)^*|$$

Vi kan nu regne på ordenen af kernen, $|\phi^{-1}([0])|$:

$$\begin{aligned} |\phi^{-1}([0])| &= \frac{|(\mathbb{Z}/2000)^*|}{|(\mathbb{Z}/5)^*|} \\ &= \frac{\varphi(2000)}{\varphi(5)} \\ &= \frac{800}{4} \\ &= 200. \end{aligned}$$

Der er altså 200 af de ønskede restklasser.