Analyse1
Prøve 1

Eksamensnummer: 98

18. maj 2005

Opgave 1

a)

Lad f være integrabel, dvs. (jfr. 8.2.1):

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Vi bruger dette til at afgøre, om f_1 er integrabel:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f(x)\ dx \overbrace{\Leftrightarrow}^{8.3.1}$$
$$\overline{\int_a^c} f(x)\ dx + \overline{\int_c^d} f(x)\ dx + \overline{\int_d^b} f(x)\ dx = \underline{\int_a^c} f(x)\ dx + \underline{\int_c^d} f(x)\ dx + \underline{\int_d^b} f(x)\ dx$$
$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{8.2.1} \overline{\int_c^d} f(x)\ dx = \underline{\int_c^d} f(x)\ dx \Leftrightarrow \overline{\int_c^d} f_1(x)\ dx = \underline{\int_c^d} f_1(x)\ dx$$

Dermed er vi kommet frem til, at 8.2.1 gælder for f_1, som dermed per definition er integrabel.

For f_2 har vi, at

$$\overline{\int_a^c} f_2(x)\ dx = \underline{\int_a^c} f_2(x)\ dx = \overline{\int_d^b} f_2(x)\ dx = \underline{\int_d^b} f_2(x)\ dx = 0,$$

og får derfor, at

$$\overline{\int_a^d} f_2(x)\ dx = \underline{\int_a^d} f_2(x)\ dx$$

Dermed er også f_2 integrabel.

Vi har nu, at

$$\overline{\int_c^d} f(x)\ dx = \overline{\int_c^d} f_1(x)\ dx = \overline{\int_a^b} f_2(x)\ dx$$

og

$$\underline{\int_c^d} f(x)\ dx = \underline{\int_c^d} f_1(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f_2(x)\ dx$$

hvilket vil sige, at

$$\int_c^d f_1(x)\ dx = \int_a^b f_2(x)\ dx.$$

b)

Lad mængden af de n afvigende punkter være givet ved $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq [a;b]$. Vi anvender indskudsreglen n gange, idet vi "deler integralet op"ved hvert af de afvigende punkter:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dx &= \int_a^{x_1} f(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x)\ dx \\
&= \int_a^{x_1} g(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)\ dx + \dots + \int_{x_n}^b g(x)\ dx
\end{aligned}$$

Da $g(x)$ er defineret på samme interval som $f(x)$ og kun afviger i endepunkterne af ovenstående integraler i summen, samtidig med at endepunkterne er uden betydning for integralernes værdi (da $\int_c^c f(x)\ dx = 0$), er $g(x)$ integrabel, og $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$.

Opgave 2

Et godt gæt på en passende funktion ville være at se på integralet for funktionen $f(x) = x\sin(\pi x)$ i intervallet $[0;1]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin(\pi x)\ dx &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} + \left[-\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} + 0 + 0 = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

idet vi her har integreret partielt.

Vi anvender nu $f(x)$ som vores funktion til at opstille Riemannsummen på intervallet [0;1], idet vi laver den trivielle inddeling $\Pi_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$ i n lige store stykker af længde $\frac{1}{n}$. Dermed kan vi opstille Riemann-summen for funktionen $f(x)$ med inddelingen Π_n, idet $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, med udvalget $U_n = \{k_i \mid k_i = \frac{i}{n}\ ,\ i = 1, \dots, n\}$:

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Vi har nu fra Korollar 8.5.4, at

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^1 x\sin(\pi x)\ dx = \frac{1}{\pi}.$$

Opgave 3

a)

Vi ser på tilfældet $a = 0$. Vi bemærker at $\int_0^\infty f(x)\ dx$ er positiv overalt, og at $e^{\frac{1}{x^2}} \geq 1$, når $x > 0$. Specielt er også funktionen $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\ dx$ divergent (9.5.8), positiv og konstant mindre end $f(x)$. Derfor er $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\ dx$ også divergent. Sammenligningskriteriet giver os nu, at da $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\ dx$ divergerer, gør $\int_0^\infty f(x)\ dx$ det også.

Vi ser nu på tilfældet $a > 0$. Vi vælger et $M \geq f(x)\ \forall x \in [a;1]$. Et sådant eksisterer, da $f(x)$ er kontinuert på $[a;1]$, og $[a;1]$ er en kompakt delmængde. Herefter definerer vi en ny funktion, $g(x)$ som følger:

$$g(x) := \begin{cases} M & for \quad x \in [a;1] \\ \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & for \quad x \in]1;\infty[\end{cases}$$

Ved denne definition er $g(x) \geq f(x)$ overalt og positiv, og sammenligningskriteriet giver, at hvis $\int_1^\infty g(x)\ dx$ konvergerer, så gør $\int_a^\infty f(x)\ dx = \int_a^1 f(x)\ dx + \int_1^\infty f(x)\ dx\ ,\ a > 0$ det også:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b g(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} -e^{\frac{1}{b}} + e = e - 1 < \infty$$

Vi har nu vist, at $\int_a^\infty f(x)\ dx$ er divergent for $a = 0$ og konvergent for $a > 0$.

b)

Vi får fra indskudsreglen, at

$$F(y) = \int_y^\infty f(x)\ dx = \int_y^1 f(x)\ dx + \int_1^\infty f(x)\ dx = -\int_1^y f(x)\ dx + k$$

Da $f(x)$ er kontinuert, får vi nu fra 8.3.3, at

$$F'(y) = \left(-\int_1^y f(x)\ dx\right)' + (k)' = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{1}{y^2}}\ ,\ y > 0.$$

c)

Lad $g(x)$ være defineret som i a). Vi har da, at

$$F(y) = \int_y^\infty f(x)\ dx \leq \int_y^\infty g(x)\ dx\ ,\ y \geq 1.$$

Som en konsekvens heraf er

$$\lim_{y\to\infty} F(y) \leq \lim_{y\to\infty} \int_y^\infty g(x)\ dx = \lim_{y\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int_y^b g(x)\ dx = \lim_{y\to\infty} \lim_{b\to\infty} \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_y^b = 0$$

Hvis vi sætter $h(y) := \int_1^\infty \frac{1}{y}\ dy$ (som er divergent), kan vi anvende grænse-sammenligningskriteriet til at afgøre, om $\int_1^\infty F(y)\ dy$ er divergent:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{F(y)}{h(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\frac{1}{y^2} e^{\frac{1}{y^2}}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to\infty} e^{\frac{1}{y^2}} = 1 > 0$$

Idet vi i første skridt får et 0/0-udtryk og derfor anvender L'Hopitals regel. Altså har vi vist, at $\int_1^\infty F(y)\ dy$ er divergent.