Analyse1
Obligatorisk prøve 2

Eksamensnummer: 98, Antal sider: 6

30. maj 2005

Opgave 1

a)

Da $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}>0$ har vi at gøre med en positiv række.
Betragt funktionen $g(x)=\frac{1}{n^p}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{p+1/2}}$, som en positiv, kontinuert funktion, og desuden er $g(x)\geq f(x)=\frac{1}{n^p}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ overalt.
Vi har nu fra 12.2.4, at $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)$ er konvergent for $p>\frac{1}{2}$ og divergent for $p\leq\frac{1}{2}$.
Vi kan nu bruge grænsesammenligningstesten, der giver os, at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{\frac{1}{n^p}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty} n-\sqrt{n}\sqrt{n-1}=\frac{1}{2}.$$

Altså konvergerer/divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ ved samme værdier af p som $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)$, og dermed er $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ konvergent for $p\leq\frac{1}{2}$ og divergent for $p>\frac{1}{2}$.

b)

Vi ser på de forskellige tilfælde:
$\underline{q\geq 0:}$
Rækken er positiv og kontinuert og desuden aftagende på intervallet $[3;\infty[$, når $q>0$. Vi kan derfor anvende 12.2.3 og integrere:

$$\begin{aligned}
I_b &= \int_3^b \frac{1}{x\ln x}\frac{1}{\ln(\ln(x))^q}dx \\
\left[t=\ln x\Rightarrow \tfrac{dt}{dx}=\tfrac{1}{x}\Rightarrow dt=\tfrac{1}{x}dx\right] &= \int_{\ln 3}^{\ln b}\frac{1}{t}\frac{1}{(\ln t)^q}dt \\
\left[s=\ln t\Rightarrow \tfrac{ds}{dt}=\tfrac{1}{t}\Rightarrow ds=\tfrac{1}{t}dt\right] &= \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln b)}\frac{1}{s^q}ds \\
&= \left[\frac{1}{1-q}\cdot s^{1-q}\right]_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln b)} \\
&= \frac{1}{1-q}(\ln(\ln b))^{1-q}-\underbrace{\frac{1}{1-q}(\ln(\ln 3))^{1-q}}_{=k}
\end{aligned}$$

Vi ser nu på grænseværdien af integralet:

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}(\ln(\ln b))^{1-q}-k\right)$$

som er lig $-k$ for $q>1$ og lig ∞ for $0\le q<1$.

<u>$q=1:$</u>
For $q=1$ har vi en aftagende række positiv række, og vi kan derfor integrere:

$$\int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln b)}\frac{1}{s^q}ds=[\ln|s|]_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln b)}=\ln|\ln(\ln b)|-\ln|\ln(\ln 3)|$$

som går mod ∞ for $b\to\infty$.

<u>$q<0:$</u>
Når $q<0$ har vi:

$$\frac{1}{n\ln(n)}\frac{1}{\ln(\ln(n))^q}=\frac{\ln(\ln(n))^{-q}}{n\ln(n)}$$

Vi har nu fra opgave 12.2.2, at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ er divergent. Vi har ligedes, at

$$\exists N\in\mathbb{N}:\ \frac{\ln(\ln(n))^{-q}}{n\ln(n)}\ge\frac{1}{n\ln(n)}\ ,\ \text{når } n\ge N$$

Derfor er $\frac{\ln(\ln(n))^{-q}}{n\ln(n)}$ divergent.

Sammenfattende har vi altså, at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}\frac{1}{\ln(\ln(n))^q}$ er konvergent for $q>1$ og divergent for $q\le 1$.

c)

Rækken er oplagt positiv. Vi anvender forholdstesten (12.4.5):

$$a=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+sn+1}{(n^3+3)^r}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4+\frac{s}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{(n^3+3)^r}{n^2}}\right|$$

Vi ser nu, at der må ske noget for $r=2/3$. Vi vælger et $\delta>0$ og sætter $r=2/3+\delta$:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4+\frac{s}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{(n^3+3)^{2/3+\delta}}{n^2}}\right|=0$$

og forholdstesten giver os nu, at rækken er absolut konvergent.

Se nu på $r=2/3-\delta$:

$$a=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4+\frac{s}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{(n^3+3)^{2/3-\delta}}{n^2}}\right|=\infty$$

Her er rækken altså divergent.

Til sidst ser vi på $r = 2/3$:

$$a = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4 + \frac{s}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{(n^3+3)^{2/3}}{n^2}} \right| = 4$$

Her er rækken altså divergent.

Herudover er også $a = 0$, når $4n^2 + sn + 1 = 0 \Leftrightarrow s = 4n + \frac{1}{n}$, for denne værdi af s er rækken altså også absolut konvergent.
Sammenfattende har vi, at rækken er absolut konvergent for $r > 2/3$ og for $s = 4n + \frac{1}{n}$.

Opgave 2

a)

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, er følgen jfr. 4.3.1 konvergent.
Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ i intervallet fra q til p. f er kontinuert og begrænset på dette interval, og den er derfor integrabel:

$$\int_q^p \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_q^p = \ln p - \ln q = \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Vi vælger nu vores $f(c_i) = \frac{1}{c_i}$, og inddeler $[q;p]$ i $\Pi_n = \{q, q+\frac{1}{n}, q+\frac{2}{n}, \ldots, p\}$.
altså bliver vores $\Delta x_i = \frac{1}{n}$.
Vi vælger hertil et passende udvalg: $U_n = \{c_i \mid c_i = q + \frac{i}{n}, i = 1, 2, \ldots, n\}$.
Da $\lim_{n\to\infty} \Delta x_i = 0$, kan vi nu opstille Riemann-summen for rækken:

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{qn + i}$$

Vi har nu ifølge 8.5.4, at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{qn+i} = \int_q^p \frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

b)

Vi viser påstanden ved induktion efter n:

$\underline{n = 1:}$

$$s_2 = x_1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Altså kan induktionen starte.

$\underline{n > 1:}$
Antag $s_{2n} = x_n$, dvs. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (induktionsantagelsen).

Vi ser på:

$$\begin{aligned}
s_{2n+2} &= x_{n+1} \\
&\Updownarrow \\
\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \\
&\Updownarrow \\
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} \\
&\Updownarrow \\
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&\Updownarrow \\
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&\Updownarrow \\
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

som jfr. induktionsantagelsen er sandt!
Altså er induktionen (og dermed opgavens påstand) bevist.

c)

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, er følgen ifølge 4.3.1 konvergent.
Se på:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} s_{2n} \\
\text{[fra opgave b)]} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_n \\
\text{[fra opgave a)]} &= \ln\left(\frac{p}{q}\right) \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

idet vi her har udnyttet, at grænseværdien for n gående mod ∞ må være den samme som for $2n$ gående mod ∞.

Opgave 3

a)

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, er $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ det også. Vi har så:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \; n \geq N \Rightarrow |a_n| < 1.$$

Vi får så fra 12.4.5, at da $|\sin(a_{n+1}^2)| < |\sin(a_n^2)|$, er $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(a_{n+1}^2)}{\sin(a_n^2)}\right| < 1$. Altså konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(a_n^2)$ absolut.

b)

Se på rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Denne er jfr. 12.2.4 divergent, og følgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænset, da $\frac{1}{n} \in]0;1]\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Se så på

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Vi anvender forholdstesten for generelle rækker for at afgøre, om den er konvergent:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right| < 1$$

da $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ og defineret på $]0;1]$, hvor $0 < \sin < 1$.
Følgende må $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ være konvergent.

c)

Vi skal vise, at $|F(a_n)| \leq |a_n|$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} |F(a_n)|$ konvergent.
Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, er $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ det også, og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
Da $|\sin(t^2)| \leq |t^2|\ \forall t \in \mathbb{R}$, har vi, at

$$\left|\int_0^{a_n} \sin(t^2)dt\right| \leq \int_0^{a_n} t^2 dt = \left[1/3t^3\right]_0^{a_n} = 1/3a_n^3.$$

Betragt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{|a_n|} t^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1/3t^3\right]_0^{|a_n|} = 1/3|a_n|^3 \to 0 \text{ for } |a_n| \to 0.$$

Sammenligningskriteriet giver os nu, at $\sum_{n=1}^{\infty} |F(a_n)|$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} F(a_n)$ absolut konvergent.

d)

Se på rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Vi har da, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er divergent. Derfor er også $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n^2)$ divergent jfr. opgave 12.2.4.

Se nu på $\sum_{n=1}^{\infty} F(a_n) = \int_0^{a_n} \sin(t^2)dt$, som er en alternerende række, hvor $\lim_{n\to\infty} \left|\int_0^{a_n} \sin(t^2)dt\right| = 0$ (altså leddene går mod 0), og sætning 12.3.1 giver os så, at da må $\sum_{n=1}^{\infty} F(a_n)$ konvergere, hvormed det ønskede er vist.