Analyse1
Prøve 3

Eksamensnummer 98. Antal sider: 3

12. juni 2005

Opgave 1

a)

Vi omskriver:

$$e^{-n^2x^2} = \frac{1}{e^{n^2x^2}} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$$

Vi har så per 11.3.5, at

$$d_{\mathbb{R}}(f_n, 0) = \sup\{|0 - f_n(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Definition 11.3.6 giver os så, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod 0-funktionen på $\mathbb{R}$.

b)

Vi differentierer $f_n(x)$ og finder dens grænseværdi:

$$(f_n')(x) = -2nxe^{-n^2x^2} = -\frac{2nx}{e^{n^2x^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{2nx}{e^{n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2x}{2nx^2e^{n^2x^2}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{nx2e^{n^2x^2}} = 0$$

idet vi i første skridt har brugt L'Hopital på et ∞/∞-udtryk. For $x = 0$ er $(f_n')(0) = 0$, og 11.3.1 giver da, at $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer punktvis mod 0-funktionen.

Vi differentierer en gang til og finder nulpunkter i den andenafledte for at finde maksimalværdier for $(f_n')(x)$:

$$\begin{aligned}
(f_n'')(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2ne^{-n^2x^2} + (-2nx(-2xn^2e^{-n^2x^2})) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2ne^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1 - 2n^2x^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2n^2x^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2n^2}}
\end{aligned}$$

Disse to værdier indsætter vi i $(f_n')(x)$ for at finde $d_{\mathbb{R}}((f_n')(x),0)$:

$$(f_n')\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2n^2}}\right) = \mp 2n\left(\sqrt{\frac{1}{2n^2}}\right)e^{-n^2\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2n^2}}\right)^2} = \mp 2n\frac{1}{\sqrt{2}n}e^{-\frac{n^2}{2n^2}} = \mp\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

Vi har nu, da f_n' er kontinuert og begrænset (tælleren vokser hurtigere end nævneren, når $x\to\infty$), at $d_{\mathbb{R}}(f_n',0) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$. Dennes grænseværdi for $n\to\infty$ er lig sig selv (som ikke er 0), altså konvergerer $(f_n')(x)$ ikke mod 0-funktionen uniformt.

Opgave 2

a)

Se på rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{an}}$. $\frac{1}{e^{an}}$ er positiv, kontinuert og aftagende ($a>0$), vi kan derfor anvende integraltesten for at afgøre, om rækken er konvergent:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{e^{an}}\,dn = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-an}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{a}e^{-ab}+\frac{1}{a}e^{-a}\right) = \frac{1}{a}e^{-a}$$

som er en positiv konstant, altså er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{an}}$ konvergent.
Da $x\geq a>0$, gælder der desuden, at

$$\left|\frac{1}{1+e^{nx}}\right| < \frac{1}{e^{an}} \Leftrightarrow e^{an} < 1+e^{nx} \quad \forall x\forall n\in\mathbb{N}$$

Jfr. 12.5.1 (Weierstrass) vil $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nx}}$ så konvergere uniformt på ethvert $[a;\infty[$, $a>0$, og ifølge 12.1.9 vil $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nx}}$ så også gøre det.

b)

Vi har fra a), at rækken konvergerer uniformt på $[a;\infty[$, $a>0$. Vælg nu et $x\in]0;\infty[$, så vil $x\in[a;\infty[$ for $a=\frac{x}{2}$.
Sumfunktionen er $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+e^{nx}}$. Da følgen af n-te delsummer $(f_n)(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+e^{kx}}$ konvergerer uniformt mod f på $[x/2;\infty[$, og f_n er kontinuert i x, giver 11.3.8, at f er kontinuert på $]0;\infty[$.
Betragt nu $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+e^{kx}}$, som er følgen af delsummer, der jfr. TL s.590m også konvergerer uniformt. Dette betyder med andre ord (per 11.3.6), at

$$\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\forall x\in[a;\infty[:\ n>N\Rightarrow d_{[a;\infty[}(f_n,f)<\epsilon.$$

At følgen skal konvergere punktvis vil tilsvarende (per. 11.3.1) sige, at

$$\forall x\in[a;\infty[\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:\ n>N\Rightarrow|f_n-f|<\epsilon.$$

Dette er klart opfyldt, da definitionen af uniform konvergens gælder for *alle* x, og dermed også de enkelte x i definitionen af punktvis konvergens, og desuden er $|f-f_n|\leq\sup\{|f-f_n|\}=d_{[x/2;\infty[}(f,f_n)$, og derfor konvergerer rækken punktvis, jfr. TL s.590m, da vores x var valgt vilkårligt.

Opgave 3

a)

Betragt for $x \neq 0$: $\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$. Ved hjælp af 12.8.2 i) substituerer vi på følgende måde:

$$\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{2k}\right)-1}{x^2} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{2k}}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{2k-2}$$

For $x = 0$ har vi så specielt, at $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}0^n = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$.

Ønsker vi potensrækken på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, observerer vi, at $2k - 2 \geq 0$ er et lige tal. Sæt $n = 2k - 2$. Vi har så, at $k = n/2 + 1$, og får så (med $a = 0$, dvs. $(x-0)^n$)), at

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{(n/2+1)!} & n \text{ lige} \\ 0 & n \text{ ulige} \end{cases}$$

b)

Vi anvender forholdstesten på $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{2k-2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}x^{2(k+1)-2}}{\frac{1}{k!}x^{2k-2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k!x^{2k}}{(k+1)!x^{2k-2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{k+1}\right| = 0 < 1$$

Altså konvergerer potensrækken absolut overalt (den har altså konvergensradius $]-\infty;\infty[$ med $a = 0$) og er dermed også konvergent overalt jfr. 12.4.2. Så har vi specielt jfr. 12.8.3, at potensrækken er vilkårligt ofte differentiabel, og at den er lig Taylor-rækken for f.

c)

For $k = 4$ får vi fra opgave a), b) og 12.8.3 igen, at

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \Leftrightarrow f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = \frac{4!}{(4/2+1)!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$