Analyse1
Prøve 4

Eksamensnummer: 98. Antal sider: 5

7. juli 2005

Opgave 1

a)

- $A = \{(x, y, x) \mid x > 0, y > 0, z > 0, xyz < 8\}$:

  Betragt projektionerne π_1, π_2, π_3 og funktionen f givet ved $\pi_1 : (x, y, z) \to x$, $\pi_2 : (x, y, z) \to y$, $\pi_3 : (x, y, z) \to z$, $f : (x, y, z) \to xyz$, der alle er kontinuerte afbildninger. Betragt nu deres inverse billeder: $\pi_1^{-1}(]0; \infty[)$, $\pi_2^{-1}(]0; \infty[)$, $\pi_3^{-1}(]0; \infty[)$, $f^{-1}(] - \infty; 8[)$. Da er

  $$A = \pi_1^{-1}(]0; \infty[) \ \cap \ \pi_2^{-1}(]0; \infty[) \ \cap \ \pi_3^{-1}(]0; \infty[) \ \cap \ f^{-1}(] - \infty; 8[)$$

  som er en endelig fællesmængde af 4 åbne mængder, derfor er A åben, men så kan A hverken være afsluttet eller kompakt.

- $B = \{(x, y, z) \mid z \geq 0, y^2 \leq 4 - 2x, xyz \leq 8\}$:

  Betragt projektionen π_1 og funktionerne f_1, f_2 givet ved $\pi_1 : (x, y, z) \to z$, $f_1 : (x, y, z) \to y^2 + 2x$, $f_2 : (x, y, z) \to xyz$, der alle er kontinuerte afbildninger. Betragt nu deres inverse billeder: $\pi_1^{-1}([0; \infty[)$, $f_1^{-1}(] - \infty; 4])$, $f_2^{-1}(] - \infty; 8])$. Da er

  $$B = \pi_1^{-1}([0; \infty[) \ \cap \ f_1^{-1}(] - \infty; 4]) \ \cap \ f_2^{-1}(] - \infty; 8])$$

  som er en endelig fællesmængde af 3 afsluttede mængder, derfor er B afsluttet. Da B er ubegrænset, er B ikke kompakt.

- $C = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x, y^2 \leq 4 - 2x\}$:

  Betragt $C_1 = \{(x, y, z) \mid z \geq 0, x - z \geq 0, y^2 + 2x \leq 4\}$. Der gælder klart, at $C \subseteq C_1$ og $C_1 \subseteq C$, dvs. $C = C_1$. Vi kan altså vha. C_1 betragte projektionen π_1 og funktionerne f_1, f_2 givet ved $\pi_1 : (x, y, z) \to z$,

$f_1 : (x, y, z) \to x - z$, $f_2 : (x, y, z) \to y^2 + 2x$, der alle er kontinuerte afbildninger. Betragt nu deres inverse billeder: $\pi_1^{-1}([0; \infty[)$, $f_1^{-1}([0; \infty[)$, $f_2^{-1}(] - \infty; 4])$. Da er

$$C_1 = C = \pi_1^{-1}([0; \infty[) \ \cap \ f_1^{-1}([0; \infty[) \ \cap \ f_2^{-1}(] - \infty; 4])$$

som er en endelig fællesmængde af 3 afsluttede mængder, derfor er C afsluttet. C er klart begrænset, da $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ og $0 \leq z \leq 2$, altså er C kompakt.

b)

Da vi har vist, at C var kompakt, er det nok at vise, at f er kontinuert, for så vil f i følge CB6.10 antage maksimalværdi på C.

Se på $\frac{\ln(1+x)}{x}, x \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x + 1} = 0$$

idet vi i første skridt har brugt L'Hopital på et 0/0-udtryk.
Lad (x_n, y_n) være en følge, der konvergerer mod $(0, 0)$, dvs. fra et vist trin er alle led i x_n og y_n mindre end eller lig 1. Men så vil følgende gælde (da absolutværdi som funktion er kontinuert):

$$0 \leq \left| \frac{\ln(1 + x_n^2 y_n^2)}{x_n} \right| \leq \left| \frac{\ln(1 + x_n^2)}{x_n} \right|, \text{ hvor } \lim_{x \to 0} \left| \frac{\ln(1 + x_n^2)}{x_n} \right| = 0.$$

Jævnfør ovenstående "sandwich"vil så specielt gælde, at

$$\lim_{x \to 0} \left((1 + z^2 y^2) \frac{\ln(1 + x^2 y^2)}{x} \right) = 0$$

og dermed er f kontinuert. Jævnfør CB6.10 antager da f sin maksimalværdi på C.

Opgave 2:

a)

Vi anvender forholdstesten (12.4.5) på potensrækken:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)x^{n+1}\cdot n}{(n+1)\ln n\cdot x^n}\right| &= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)\cdot n}{(n+1)\ln n}\right| \\
(L'Hopital) &= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+1}\ln(n+1)}{\frac{n+1}{n}\ln n}\right| \\
(L'Hopital) &= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{-n}{(n+1)^2}+\frac{2}{n+1}}{\frac{-(n+1)}{n^2}+\frac{2}{n}}\right| \\
&= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)n^2}{(n+1)^2(n-1)}\right| \\
&= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3+2n^2}{n^3+n^2-n-1}\right| \\
&= |x|\cdot 1 = |x|
\end{aligned}$$

Altså konvergerer rækken for $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ og divergerer for $|x| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\ \cup\ ]1;\infty[$, og den har altså konvergensradius $r = 1$.

b)

Med $a = 0, a_n = \frac{\ln n}{n}, a_{n-1} = \frac{\ln(n-1)}{n-1}$ giver 12.7.1 følgende udtryk:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{\ln(n-1)}{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n-1)}{n^2-n}x^n\ ,\ x \in]-1;1[,$$

som jo netop er en potensrække med $a = 0, a_n = \frac{\ln(n-1)}{n^2-n}$.

c)

Vi tjekker konvergens i endepunkterne $x = 1$ og $x = -1$.

For $x = -1$ er $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n-1)}{n^2-n}(-1)^n$ alternerende, og da $|a_n|$ er aftagende for $n \geq 3$, tjekker vi, om $|a_n|$ går mod nul, jfr. 12.3.1:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\ln(n-1)}{n^2-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n(-1)^{n-1}}{n-1}}{2n-1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(-1)^{n-1}}{2n^2-3n+1}\right| = 0$$

Altså er $F(x)$ konvergent i $x = -1$.

For $x = 1$ er $F(x) = \frac{\ln(n-1)}{n^2-n}$. $f(n) = \frac{\ln(n-1)}{n^2-n}$ er positiv og kontinuert for $n > 2$ og aftagende for $n \geq 3$, altså kan vi anvende integraltesten 12.2.3 for at afgøre, om $F(x)$ er konvergent i $x = 1$:

$$\lim_{b \to \infty} \int_3^b \frac{\ln(n-1)}{n^2 - n} \, dn \approx 0,7295 < \infty \ ,$$

altså er $F(x)$ konvergent for $x = 1$ jfr. 12.2.3.

Vi har nu fra 12.6.8, at potensrækken er kontinuert på $]0-r; 0+r[=]-1; 1[$. Yderligere giver 12.6.9 os så, at potensrækken er kontinuert på $[-1; 1]$, som er det ønskede resultat.

Opgave 3

a)

Vi ved fra prøve 3, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+e^{nx}}, x > 0$ er uniformt og punktvist konvergent på $]0; \infty[$. Betragt delsummen $f_k' = \sum_{n=1}^{k} \frac{ne^{nx}}{1+e^{nx}}$, der oplagt er kontinuert for $x > 0$. For $a > 0, x \geq a$ er

$$\left| \frac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} \right| \leq \left| \frac{n}{e^{nx}} \right| \leq \left| \frac{n}{e^{na}} \right| .$$

Betragt nu, idet vi anvender rodtesten 12.4.6,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{e^{na}} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{|n|}}{e^{a/n}} = \frac{1}{e} < 1.$$

Dvs. (f_k') er dermed konvergent, og vi kan så bruge Weierstrass' M-test, der giver os, at så er f_n uniformt konvergent for $x \geq a > 0$. Efterfølgende kan vi så anvende 11.4.3, der så giver, at f er differentiabel med den ønskede afledte f' for $x \geq a > 0$, hvor a var vilkårlig, dermed også for $x > 0$.

b)

Vi omskriver den givne talrække:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\left(f(m)-\frac{1}{2}\right) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+e^{mn}}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{mn}}\right)\\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-m})^{n}\right)\\
&= \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-m}}{1-e^{-m}}}_{\text{geometrisk række}}\\
&\leq \frac{1}{1-e^{-1}}\quad \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m}}_{\text{geometrisk række}}\quad < \infty
\end{aligned}$$

Jævnfør 12.1.1 får vi så, at da $|r| = |e^{-1}| < 1$, konvergerer $\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m}$, og så giver sammenligningstesten, at så må $\sum_{m=1}^{\infty}\left(f(m)-\frac{1}{2}\right)$ også gøre det, hvorved det ønskede er vist.