

Indholdsfortegnelse:

	Indledning / forord	s. 1
1.	Matricer, generelt	s. 2-3
2.	Nogle egenskaber for matricer	s. 3-6
3.	Determinanter	s. 6-7
4.	Determinant-sætninger	s. 7-9
5.	Minorer, kofaktorer og komplementer	s. 9-10
6.	Nogle metoder til reduktion af determinanter	s. 10-11
7.	Matrixinversion	s. 12-13
8.	Lineære ligningssystemer	s. 13
9.	Cramers formel	s. 13-15
10.	Opgaver	s. 16
11.	Sammenfattende konklusion	s. 16
	Litteraturliste	s. 17
	Bilag 1: Bevis angående trekantsmatricens determinant	s. 18
	Bilag 2: Laplaces udviklingssætning	s. 19-20
	Bilag 3: Eksempel på beregning af invers matrix	s. 21
	Bilag 4: Beregning af $ A $ i Opgave 1)	s. 22
	Bilag 5: Beregning af $ A $ i Opgave 2)	s. 23
	Bilag 6: Beskrevet kildekode til TI-83 program	s. 24-25
	Bilag 7: TI-83 program (diskette)	Plastlomme bagerst

Indledning/forord:

Målet med denne opgave vil være at finde frem til en metode, hvorpå n ligninger med n ubekendte kan løses ved hjælp af matricer. Gennem hele opgaven vil forløbet være rettet mod dette mål, hvor vi så gennem opgaven gradvist vil se på de enkelte elementer, der kræves for at kunne nå dette mål. Teorien i de enkelte afsnit i opgaven vil lægge op til og kunne bruges som grundlag for de følgende afsnit. Der er af pladshensyn kun medtaget de til løsning af opgavens mål nødvendige elementer, som kun udgør en lille flig af matrixteorien, der (igen af pladshensyn) så vidt muligt er gennemgået uden relation til vektorrum, hvilket ellers er det normale.

Med hensyn til kildelitteraturens brug af symbolik har denne vist sig at være meget varierende. Hele opgaven er derfor af hensyn til læseren omskrevet til ens symbolik.

Opgavens teori vil være illustreret med lutter selvkonstruerede eksempler i det omfang, det synes nødvendigt. Lommeregneren Texas Instruments TI-83 vil ligeledes blive inddraget i eksempler og teori i passende grad.

Strukturen i opgaven vil være at starte fra bunden og bevæge sig op i sværhedsgrad. Vi starter derfor med at gennemgå begrebet matricer.

1. Matricer, generelt:**Definition¹:**

- En gruppe af elementer ordnet rektangulært i rækker og søjler og omgivet af klammer, hvorom der gælder visse regneregler, kaldes en *matrix*.
- Elementerne i matricen kan være reelle tal, komplekse tal, funktioner, variable og lignende.
- Antallet af rækker (m) og antallet af søjler (n) angiver matrixens størrelse, og man siger, at matricen har *dimensionen* $m \times n$.
- Matricer angives med store fede bogstaver, begyndende fra **A**.

Eksempel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -147 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & \ln 4 \\ \sqrt{2} & 4 & e \\ 0 & \log 12 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{er matricer.}$$

A har dimensionen 2×2 , **B** har dimensionen 3×1 , **C** har dimensionen 3×3 .

Den generelle matrix **A** (vi kalder den standardmatricen) angives normalt på følgende form²:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{eller på forkortet form: } \mathbf{A} = [a_{ij}] \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

Her kaldes a_{ij} for et *element* i matricen, og fodnoterne i og j i elementet betegner hhv. elementets række- og søjlenummer, med andre ord dets placering i matricen. Ofte anvendes skrivemåden $\mathbf{A} = [a_{ij}] \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n)$ som en fællesbetegnelse for alle matrixens elementer.

2. Nogle specielle matricer³:

Vi vil nu se på et lille udpluk af nogle forskellige matricer:

Kvadratisk matrix: Her er $m=n$, dvs. samme antal rækker og søjler. Heri eksisterer der en *diagonal*, hvilket vil sige elementerne $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Nulmatrix: Alle elementerne i matricen er 0. Denne matrix skrives $\mathbf{0}_{mn}$, hvor mn er matrixens dimension. Indicer kan udelades.

¹ Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.1ø

² Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.1m

³ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.28f

- Diagonalmatrix:** Alle elementer uden for diagonalen i denne kvadratiske matrix er 0.
- Enhedsmatrix:** Alle elementer i matrixen er 0 på nær diagonalen, der indeholder et-taller. Denne matrix er pga. diagonalen nødvendigvis kvadratisk og skrives $\mathbf{E}_n$, hvor n er matrixens dimension. Indicer kan udelades.
- Trekantsmatrix:** Alle elementer over (eller under) diagonalen er 0. Denne matrix er ligeledes kvadratisk.

Eksempel:

$$\mathbf{0}_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}_{mn}$ er den generelle nulmatrix, $\mathbf{E}_n$ er den generelle enhedsmatrix, $\mathbf{A}$ er en trekantsmatrix.

3. Nogle egenskaber for matricer:Matrixaddition/-subtraktion⁴:

To matricer kan adderes/subtraheres, hvis de har samme dimension. De kaldes så *egnede* til addition/subtraktion, der foregår ved addition/subtraktion af de korresponderende elementer:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

Der gælder desuden følgende regler⁵, som vi gengiver uden bevis:

Givet matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$, der er egnede til addition :

- 1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ [matrixaddition er kommutativ]
- 2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ [matrixaddition er associativ]
- 3) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- 4) Der findes en matrix $\mathbf{D}$, så $\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{B}$

⁴ Jørgen Jørgensen m.fl., Lineær algebra, Gad, 1977, s.41ff

⁵ Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.2n

Skalar (tal) gange matrix⁶:

En skalar (et tal), k , kan ganges på ethvert element i matricen:

$$k \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix} = [k \cdot a_{ij}] = k \cdot [a_{ij}]$$

Der gælder desuden følgende regler, som vi gengiver uden bevis:

Givet matricen $\mathbf{A}$ og de reelle tal k og l :

- 1) $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$
- 2) $(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$
- 3) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})k$
- 4) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Matrix-multiplikation⁷:

To matricer, $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$, er *egnede* til multiplikation, hvis $\mathbf{A}$ har dimensionen $m \times p$, og $\mathbf{B}$ har dimensionen $p \times n$. Altså hvis antallet af søjler i $\mathbf{A}$ er lig antallet af rækker i $\mathbf{B}$. Den resulterende matrix, $\mathbf{C}$, får så dimensionen $m \times n$.

Heraf følger umiddelbart, at samtlige kvadratiske matricer kan multipliceres med sig selv.

Multiplikationen foregår ved *række-søjle-multiplikation*. Elementet i den i 'te række og j 'te søjle i $\mathbf{C}$ er den i 'te række i $\mathbf{A}$ multipliceret med den j 'te søjle i $\mathbf{B}$. Altså f.eks. elementerne i *række 1* i $\mathbf{A}$ bliver multipliceret med de korresponderende elementer i *søjle 1* i $\mathbf{B}$.

Vi generaliserer selv metoden med lettere forkortede udgaver af standardmatricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mp} \cdot \mathbf{B}_{pn} &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \cdots + a_{1p} \cdot b_{p1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1n} + \cdots + a_{1p} \cdot b_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \cdots + a_{mp} \cdot b_{p1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1n} + \cdots + a_{mp} \cdot b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{mn} \end{aligned}$$

⁶ Jørgen Jørgensen m.fl., Lineær algebra, Gad, 1977, s.43m

⁷ Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.3

Der gælder desuden følgende regler⁸, som vi gengiver uden bevis:

Givet $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ der er egnede til nedenstående :

- 1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ [1. distributive lov]
- 2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ [2. distributive lov]
- 3) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ [associative lov]
- 4) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (i det generelle tilfælde)
- 5) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ medfører ikke nødvendigvis, at $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{B} = \mathbf{0}$
- 6) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ medfører ikke nødvendigvis, at $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

Transponering⁹:

Vi ser på standardmatricen $\mathbf{A}$.

Den *transponerede* matrix, betegnet $\mathbf{A}'$, er givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Efter transponeringen er rækkerne i $\mathbf{A}$ blevet til søjlerne i $\mathbf{A}'$.

I en kvadratisk matrix "spejles" elementerne i diagonalen.

Der gælder desuden følgende regler, som vi gengiver uden bevis:

Givet $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$, deres respektive transponerede $\mathbf{A}'$ og $\mathbf{B}'$ og en skalar, k :

- 1) $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
- 2) $(k \cdot \mathbf{A})' = k \cdot \mathbf{A}'$
- 3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
- 4) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})' = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}'$

Vi vælger at udskyde matrixdivision (-inversion) til senere, da vi endnu ikke har den fornødne viden.

Vi illustrerer i stedet de ovenstående regneregler (addition/subtraktion, skalar gange matrix, multiplikation, transponering) med et eksempel:

⁸ Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.3n

⁹ Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.11f

Eksempel: Givet: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, $k = -5$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2-5 & 3+0 & 0-2 \\ 5+5 & 8+9 & 1+3 \\ 7+3 & 3-8 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -2 \\ 10 & 17 & 4 \\ 10 & -5 & 8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 0 & 9 & -8 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2+5 & 3-0 & 0+2 \\ 5-5 & 8-9 & 1-3 \\ 7-3 & 3+8 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 11 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \mathbf{A} = -5 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5) \cdot (-2) & (-5) \cdot 3 & (-5) \cdot 0 \\ (-5) \cdot 5 & (-5) \cdot 8 & (-5) \cdot 1 \\ (-5) \cdot 7 & (-5) \cdot 3 & (-5) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -15 & 0 \\ -25 & -40 & -5 \\ -35 & -15 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \cdot -5 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 3 & -2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 + 0 \cdot (-8) & -2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 5 \cdot -5 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 8 \cdot 9 + 1 \cdot (-8) & 5 \cdot (-2) + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 7 \cdot -5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 7 \cdot 0 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot (-8) & 7 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 27 & 13 \\ 18 & 64 & 18 \\ -8 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

Bemærkning: TI-83 har mange indbyggede faciliteter til matrixregning. Hvis vi indtaster $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ i hhv. [A] og [B], kan vi regne med dem som i ovenstående og får eksempelvis følgende resultater:

$[\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]$ [[-7 3 -2] [10 17 4] [10 -5 8]]	$[\mathbf{A}] - [\mathbf{B}]$ [[3 3 2] [0 -1 -2] [4 11 0]]	$-5 * [\mathbf{A}]$ [[10 -15 0] [-25 -40 -5] [-35 -15 -20]]	$[\mathbf{A}] * [\mathbf{B}]$ [[25 27 13] [18 64 18] [-8 -5 11]]
--	---	--	---

4. Determinanter:

Givet matricen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Vi ved fra pensum i gymnasiet, at hvis tallene havde været

koordinatsæt til vektorer, havde determinanten været givet ved $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$. Denne sammenhæng gælder også for kvadratiske matricer, hvilket giver anledning til følgende:

Definition¹⁰:

Determinanten er et tal (positivt, negativt eller 0), der knytter sig til en kvadratisk matrix. Den skrives som $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}|$.

¹⁰ Gustav Kristensen, Matematik for økonomer, Systime, 1995, s.185ff.
(denne fodnote gælder for definitionen og det efterfølgende)

For determinanter af størrelsen 2×2 gælder samme fremgangsmåde som ovenfor. 3×3 er ligeledes relativt simpel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Om dannelsen af determinanter gælder følgende:

- Hvert led indeholder ét og kun ét element fra hver række og ét og kun ét element fra hver søjle.
- Antallet af led er $n!$.
- Første fodtegn i hvert led anbringes i nummerorden (123 osv.).
- Antallet af *inversioner* i andet fodtegn, altså hvor mange ombytninger af andet fodtegn, der skal til, før andet fodtegn i hvert led står i nummerorden, bestemmer fortegnet for leddet. Et ulige antal inversioner giver et negativt fortegn, et lige antal inversioner giver et positivt fortegn.

Eksempel: $3 \ 1 \ 2 \rightarrow 3 \ 2 \ 1 \rightarrow 1 \ 2 \ 3$. To ombytninger, altså positivt fortegn.

Determinanter op til 3×3 kan altså med fordel løses ud fra ovenstående formler, men det faktum, at antallet af led vokser kraftigt med dimensionen (en 5×5 determinant har $5! = 120$ led), gør, at vi kunne ønske bedre metoder til at udregne determinanter større end 3×3 . For at finde frem til sådanne metoder, må vi dog først indføre nogle regler vedrørende determinanter.

5. Determinant-sætninger¹¹:

Om determinanter gælder en række regler:

Sætning 1: Hvis samtlige elementer i en række (søjle) i en matrix er 0, er dens determinant 0.

Bevis: Ud fra ovenstående punkt a. indeholder ethvert led i determinanten et tal fra den række (søjle), hvori alle elementerne er 0. Dette medfører, at samtlige led i determinanten er 0, og dennes værdi er derfor 0.

QED

Eksempel: $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -9 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$, fordi søjle 2 består udelukkende af nuller.

Sætning 2: Multipliceres en række (søjle) i en matrix med en skalar, k , multipliceres matrixens determinant også med k .

¹¹ Sætningerne 1-4 fra: Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.40ff

Vi illustrerer selv sætningen med en 2×2 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot a_{11}a_{22} - k \cdot a_{12}a_{21} = k \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k \cdot |\mathbf{A}|$$

Sætning 3: Hvis to rækker (søjler) i en matrix bytter plads, skifter determinanten fortegn men beholder sin numeriske værdi. Bevis overspringes.

Eksempel: $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ fordi række 1 og række 2 ombyttes.

Sætning 4: Hvis to rækker (søjler) i en matrix er ens eller proportionale, er determinanten 0.

Bevis: *To ens rækker (søjler):*
Vi har fra sætning 3, at hvis vi ombytter to ens rækker (søjler), skifter determinanten fortegn men beholder sin numeriske værdi. En ombytning af to ens rækker (søjler) ændrer dog ikke matrixen og derfor heller ikke determinanten. Der må derfor gælde, at $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}| \Leftrightarrow |\mathbf{A}| = 0$.

To proportionale rækker (søjler):
Skalaren k , der er en fælles faktor for de to proportionale rækker (søjler), kan efter sætning 2 sættes uden for determinanten. Dermed får determinanten to ens rækker (søjler) og er derfor lig 0.

QED

Eksempel: $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$ fordi søjle 1 og søjle 3 er proportionale.

Sætning 5: Er elementerne i en række (søjle) i en matrix en sum af to tal, kan matrixens determinant deles i to determinanter med hver sin af addenderne fra den pågældende række (søjle). Bevis overspringes.

Eksempel: $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-2) - 2 & 1 + 2 & 1 + 1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

Sætning 6¹²: Lægges til en række (søjle) i en matrix et multiplum af en anden række (søjle) og en skalar, k , ændres determinantens værdi ikke.

¹² Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.22, **IX**

Bevis¹³: At lægge et multiplum af en række (søjle) i en matrix **A** til en anden række (søjle) og hermed opnå en ny matrix **B**, er ifølge sætning 5 det samme som til **|A|** at lægge en determinant, hvori to rækker er proportionale. En sådan determinant har efter sætning 4 værdien 0. Deraf følger, at **|A| = |B|**.

QED

Sætning 7¹⁴: Determinanten af en trekantsmatrix er lig produktet af elementerne i diagonalen.
Bevis: se bilag 1.

Anvendes sætning 6 i praksis, siger man, at man udfører *rækkeoperationer* på matrixen. Vi skal senere se, at specielt sætning 6 og 7 er særdeles anvendelige til reduktion og efterfølgende beregning af determinanter. Vi får dog hertil brug for et redskab mere:

6. Minorer, kofaktorer og komplement¹⁵

Vi ser på en standard 3×3-matrices determinant:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Vi isolerer de led, der indeholder elementer fra eksempelvis 2. søjle, for sig og omskriver:

$$|\mathbf{A}| = a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11})$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})$$

Vi opdager nu, at parenteserne kan skrives som 2×2-determinanter:

$$|\mathbf{A}| = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Kigger vi nøje efter, ser vi, at de fremkomne determinanter fås ved at slette den række og søjle i **|A|**, hvori det foran determinanten stående element er placeret. De ovenfor fremkomne determinanter kaldes *komplementerne* til a_{12} , a_{22} og a_{32} . Fortegnet for determinanten er givet ved $(-1)^{i+j}$, hvor i er elementets rækkenummer og j dets søjlenummer. Komplementerne kaldes derfor *signerede*.

¹³ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.46

¹⁴ Frank Hansen m.fl., Lineær algebra, Akademisk Forlag, 1999, s.205n

¹⁵ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.48f. Lettere omskrevet.

Vi har altså nu reduceret beregningen af en 3×3 -determinant til beregning af flere 2×2 -determinanter. Vi siger så, at vi har *udviklet determinanten efter 2. søjle*. Reglen gælder også ved $n \times n$ -determinanter, og vi skal senere se, hvordan dette sammen med sætning 6 kan bruges til reduktion og beregning af større determinanter.

Vi sammenfatter i følgende definition:

Definition¹⁶:

Den $(n-1) \times (n-1)$ -determinant, der fremkommer ved at slette den i 'te række og den j 'te søjle i $n \times n$ -determinanten $|A|$, kaldes a_{ij} 's *minor* og skrives $|M_{ij}|$.

Den *signerede minor* $(-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$ kaldes a_{ij} 's *kofaktor* eller *komplement* og skrives C_{ij} .

Vi får senere brug for følgende sætning:

Sætning 8¹⁷: Produktsummen af elementerne i en række (søjle) i en matrix med en anden rækkes (søjles) komplement er lig 0. Bevis overspringes.

Vi har nu nok redskaber til at se på reduktion af større determinanter.

7. Nogle metoder til reduktion af determinanter¹⁸:

Determinanter af størrelsen 2×2 og 3×3 kan altså med fordel udregnes efter definitionerne. Vi skal nu se på nogle metoder, hvorpå determinant-sætningerne og teorien bag komplement kan anvendes til reduktion og beregning af større determinanter. Sidst men ikke mindst lader vi TI-83 gøre det sure arbejde for os. Vi opstiller følgende tre metoder:

1. *Trekants-matrix:*
Vi har fra sætning 7, at determinanten af en trekants-matrix er lig produktet af elementerne i diagonalen. Det vil derfor være hensigtsmæssigt vha. sætning 6 (rækkeoperationer) at omskrive matricen til en trekantsmatrix (altså skaffe nuller enten over eller under diagonalen), hvis determinant nemt kan udregnes.
2. *Udvikling efter række/søjle:*
Via rækkeoperationer (jf. sætning 6) omskrives matricen, så en af dens rækker/søjlers elementer alle bortset fra ét er 0. Man udvikler så determinanten efter denne række/søjle, hvilket giver en ny $(n-1) \times (n-1)$ -determinant. Metoden gentages, indtil man opnår en determinant af størrelsen 2×2 eller 3×3 .
3. *TI-83:*
Matricen indtastes i $[A]$. På hovedskærbilledet indtastes $\det([A])$ +ENTER.

¹⁶ Frank Ayres, Jr., Theory and problems of matrices, McGraw-Hill, 1962, s.22f

¹⁷ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.51 nederst

¹⁸ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.46f + s.50ø + s.73m

det (-funktionen hentes fra $\square \sim \det($.

Eksempel:

Givet matricen **A** og dens determinant:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 & 12 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 & 12 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

Vi anvender metode 1 (via rækkeoperationer) at danne en trekantsmatrix.

Læg 1 gange søjle 3 til søjle 4, læg derefter -2 gange række 4 til række 2:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 & 12 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & -8 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Læg -1 gange række 3 til række 1:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi har nu via rækkeoperationer fået lavet en trekants-matrix, hvis determinant er produktet af elementerne i diagonalen:

$$|\mathbf{A}| = 3 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{-24}}$$

Eksempel:

Vi bruger matricen fra ovenstående eksempel, som vi indtaster i [C] på TI-83.

Vi bruger så $\det([C])$ til at finde determinanten:

MATRIX[C] 4 x4	det([C])
$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 & 12 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$	-24
1,1=0	

Vi skal senere (Opgave 1, bilag 3) se på et eksempel på metode 2, der er den mest anvendte. Metode 2 kan også anvendes direkte ud fra teorien bag komplementer ved at udvikle efter en række/søjle uden først at anvende rækkeoperationer. Dette vil dog give n nye $(n-1)$ -determinanter i stedet for den ene $(n-1)$ -determinant, der fremkommer efter rækkeoperationerne. Denne specielle form for udvikling definerede den franske matematiker Laplace i sin udviklingssætning fra 1772 (se den og beviset i bilag 2).

Vi vil nu tage fat på emnet *matrixinversion*, som vi før har udskudt.

8. Matrixinversion¹⁹:

Vi ønsker at bestemme en *invers matrix*, $\mathbf{A}^{-1}$, der ganget med $\mathbf{A}$ giver enhedsmatricen $\mathbf{E}$. Vi ser her på den kvadratiske standardmatrix $\mathbf{A}$ og udvider Carstensens undersøgelse til $n \times n$:

Vi danner ud fra standardmatricen $\mathbf{A}$ en såkaldt *komplement-matrix*, hvis elementer er erstattet af deres komplement. Dennes transponerede kaldes den *adjungerede* matrix til $\mathbf{A}$ og betegnes $\text{adj}\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = \text{adj}\mathbf{A}$$

Vi undersøger nu matrixproduktet $\mathbf{A} \cdot \text{adj}\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \text{adj}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} & a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n} & \cdots & a_{11}C_{n1} + a_{12}C_{n2} + \cdots + a_{1n}C_{nn} \\ a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + \cdots + a_{2n}C_{1n} & a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \cdots + a_{2n}C_{2n} & \cdots & a_{21}C_{n1} + a_{22}C_{n2} + \cdots + a_{2n}C_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}C_{11} + a_{n2}C_{12} + \cdots + a_{nn}C_{1n} & a_{n1}C_{21} + a_{n2}C_{22} + \cdots + a_{nn}C_{2n} & \cdots & a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \cdots + a_{nn}C_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi bemærker nu to ting ved denne nye matrix:

1. Elementerne i diagonalen har en særlig egenskab. Et diagonal-element, f.eks. elementet i række 2 søjle 2, fremkommer på samme måde, som hvis man havde udviklet $\mathbf{A}$ efter 2. række. Altså summen af elementerne i 2. række ganget med deres komplement. Vi ved fra tidligere, at dette er lig $|\mathbf{A}|$.
2. Elementerne uden for diagonalen er produktsummer af elementerne i en række i $\mathbf{A}$ ganget med en anden rækkes komplement. Sådanne produktsummer er efter sætning 8 lig nul.

Vi kan så reducere udtrykket for $\mathbf{A} \cdot \text{adj}\mathbf{A}$ kraftigt:

$$\mathbf{A} \cdot \text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$$

¹⁹ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.55ff

Sætning 9²²: Givet et Cramersk ligningssystem. De ubekendte $x_1, x_2, \dots, x_n$ er givet ved:

$$x_i = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n. \quad |\mathbf{A}| \neq 0$$

Bevis²³: Vi udleder formelen via Carstensen's metode, idet vi selv udvider den til $n \times n$:

Da $\mathbf{A}$ er kvadratisk og $|\mathbf{A}| \neq 0$, må $\mathbf{A}$ have en invers matrix, $\mathbf{A}^{-1}$. Vi kan så omskrive ligningssystemets matrixform, idet vi søger løsningerne i $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Vi omskriver højresiden, idet vi anvender teorien bag invers matrix. Vi udfører derefter multiplikationen $\text{adj}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj}\mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot C_{11} + b_2 \cdot C_{21} + \dots + b_n \cdot C_{n1} \\ b_1 \cdot C_{12} + b_2 \cdot C_{22} + \dots + b_n \cdot C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 \cdot C_{1n} + b_2 \cdot C_{2n} + \dots + b_n \cdot C_{nn} \end{bmatrix}$$

Vi finder så de enkelte løsninger i $\mathbf{X}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \cdot C_{11} + b_2 \cdot C_{21} + \dots + b_n \cdot C_{n1} \\ b_1 \cdot C_{12} + b_2 \cdot C_{22} + \dots + b_n \cdot C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 \cdot C_{1n} + b_2 \cdot C_{2n} + \dots + b_n \cdot C_{nn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot (b_1 \cdot C_{11} + b_2 \cdot C_{21} + \dots + b_n \cdot C_{n1}) \\ x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot (b_1 \cdot C_{12} + b_2 \cdot C_{22} + \dots + b_n \cdot C_{n2}) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot (b_1 \cdot C_{1n} + b_2 \cdot C_{2n} + \dots + b_n \cdot C_{nn}) \end{array} \right\}$$

Vi kigger nærmere på parenteserne og ser, at der er tale om produktsummer af et element i $\mathbf{B}$ gange et komplement til et element i en søjle i $\mathbf{A}$. I tilfældet x_i er tale om komplementerne til den i 'te søjle i $\mathbf{A}$. Dette leder tankerne hen på en slags determinant-udvikling efter den i 'te søjle.

Vi ser eksempelvis på tilfældet x_2 :

$$x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot (b_1 \cdot C_{12} + b_2 \cdot C_{22} + \dots + b_n \cdot C_{n2}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

²² Frank Hansen m.fl., Lineær algebra, Akademisk Forlag, 1999, s.214

²³ Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.59ff

Udvikler vi nemlig denne determinant efter 2. søjle, får vi netop udtrykket i parentes.

Ligeledes kan de resterende udtryk for løsningerne opskrives på lignende måde. På samme måde opskrives udtrykket hørende til x_i derfor:

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 \cdot C_{11} + b_2 \cdot C_{21} + \dots + b_n \cdot C_{n1}) = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Her udvikles determinanten efter 1. søjle.

Det ses, at den i 'te søjle i **A** erstattes af **B**. Dermed får de omkringliggende søjler hhv. nummereringen $i-1$ og $i+1$. Vi ser nu på løsningen x_i , hvor determinanten udvikles efter den i 'te søjle, og vi finder:

$$x_i = \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 \cdot C_{1i} + b_2 \cdot C_{2i} + \dots + b_n \cdot C_{ni}) = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Af skrivehensyn kaldes determinanten hørende til x_i undertiden for $|A_i|$. Her er den i 'te søjle i **A** erstattet af **B**.

QED

Vi har altså nu fundet en metode til løsning af n ligninger med n ubekendte. Anvendelsen af f.eks. Laplace-udvikling sammen med Cramers formel er dog arbejdsmæssigt meget tidskrævende, når n overstiger 3 eller 4. Der findes andre metoder til løsning af lignende og andre ligningssystemer, men dem har vi af pladshensyn ikke kunnet medtage her.

TI-83 har dog også kapacitet til at løse n med n , næsten uanset hvad n måtte være. For folk med kendskab til matricer vil løsningerne forholdsvis hurtigt kunne findes via $A^{-1} \cdot B$ ²⁴. Folk, som *ikke* har kendskab til matricer, vil dog vha. programmer også kunne løse sådanne ligningssystemer. Til dette formål har jeg selv lavet et program, der vha. Cramers formel løser et sådant $n \times n$ ligningssystem. Brugeren skal blot indtaste n , koefficienterne (**A**) og konstanterne (**B**), og så tjekker programmet først efter, at determinanten ikke er 0. Er dette tilfældet, beregnes løsningerne og præsenteres for brugeren (så vidt muligt som brøker).

Programmet, ved navn NGANGEN.83P, er vedlagt på diskette (bilag 7), og det kan herfra lægges over på lommeregneren via et GraphLink-kabel, hvis læseren af denne opgave skulle få lyst til at efterprøve dets egenskaber. Kildekoden og en nærmere beskrivelse af, hvad der sker hvor, er vedlagt som bilag 6.

²⁴ Se hertil Jens Carstensen, Lineær algebra, Systime, 1999, s.75ø

11. Opgaver:

Opgave 1: Opgavetekst: se opgaveformuleringens bilag.

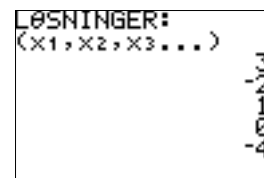
Vi ser, at ligningssystemet er af typen $n \times n$ og beregner først $|\mathbf{A}|$ (se bilag 4). Vi får: $|\mathbf{A}| = -12$.

Vi vil her af pladshensyn ikke gengive beregningen af de andre determinanter, blot nævne at de er beregnet via TI-83.

Vi opskriver så løsningerne:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-36}{-12} = \underline{\underline{3}} \quad ; \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{24}{-12} = \underline{\underline{-2}} \quad ; \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{-12}{-12} = \underline{\underline{1}}$$

$$x_4 = \frac{|\mathbf{A}_4|}{|\mathbf{A}|} = \frac{0}{-12} = \underline{\underline{0}} \quad ; \quad x_5 = \frac{|\mathbf{A}_5|}{|\mathbf{A}|} = \frac{48}{-12} = \underline{\underline{-4}}$$



Som er den eneste løsning til ligningssystemet.

Mit program på lommeregneren giver samme resultat:

Opgave 2): Opgavetekst: se opgaveformuleringens bilag.

Vi ser, at ligningssystemet er af typen $n \times n$ og beregner først $|\mathbf{A}|$ (se bilag 5). Vi får: $|\mathbf{A}| = 0$.

Dermed kan vi ikke anvende Cramers formel på dette ligningssystem, da forudsætningen for denne er $|\mathbf{A}| \neq 0$, hvilket dermed også udelukker mit program. Vi kan derfor ikke umiddelbart med de fundne metoder løse dette ligningssystem, og vi vil derfor heller ikke gøre mere ved det. Blot nævne, at der findes andre metoder til bestemmelse af, for det første hvor mange løsninger der er, og for det andet selve løsningerne.

12. Sammenfattende konklusion:

Vi har i denne opgave fået defineret begrebet *matrix*, set på nogle forskellige typer af matricer og har fået opstillet regneregler for addition/subtraktion, multiplikation, transponering og skalar gange matrix.

Begrebet *determinant* er blevet indført, og vi har vist, hvorledes en sådan findes og nogle regler gældende for determinanter. Vi har ligeledes set på nogle metoder, hvormed større determinanter kan reduceres og efterfølgende beregnes. Hertil anvendte vi endnu et redskab, *komplement*, og så derefter lidt på TI-83s muligheder for reduktion.

Vi tog så fat på emnet *matrixinversion*, der svarer nogenlunde til division. Her fandt vi, at en invers matrix eksisterer, såfremt determinanten er forskellig fra nul, hvilket havde indflydelse på resten af opgaven.

Efter en kort gennemgang af lineære ligningssystemer fremsatte og beviste vi Cramers formel til løsning af en speciel type af lineære ligningssystemer og anvendte denne formel til at løse de vedlagte opgaver.

Selv om den fundne metode er begrænset til bestemte typer af ligningssystemer, har vi med Cramers formel alligevel fået opfyldt det mål, vi stillede i vores indledning.

Litteraturliste:

<u>Forfatter:</u>	<u>Titel:</u>	<u>Forlag/udgivelsesår:</u>
Frank Ayres, Jr.	Theory and problems of matrices	McGraw-Hill, 1962
Jens Carstensen	Lineær algebra	Systime, 1999 (1994)
Frank Hansen m.fl.	Lineær algebra	Akademisk Forlag, 1999
Jørgen Jørgensen m.fl.	Lineær algebra	Gad, 1977
Gustav Kristensen	Matematik for økonomer	Systime, 1995

Bilag 1: Bevis angående trekantsmatrixens determinant.

Sætning 10²⁵: Determinanten af en trekantsmatrix er lig produktet af elementerne i diagonalen.

Bevis: Vi ser på den generelle øvre trekantsmatrix og dennes determinant:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vi udvikler efter 1. søjle, der kun indeholder ét element forskellig fra nul:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}C_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanten er her positiv, da $(-1)^{1+1} = 1$. Vi får nu en ny $(n-1) \times (n-1)$ -determinant med a_{22} som elementet i 1. søjle, 1. række.

Vi udvikler igen efter 1. søjle, der igen kun indeholder ét element forskellig fra nul:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}C_{22} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ 0 & 0 & a_{55} & \cdots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanten er igen positiv, da $(-1)^{2+2} = 1$.

Udføres denne udvikling n gange på den oprindelige matrix, får vi følgende resultat:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$$

hvilket netop er produktet af elementerne i diagonalen.

QED

²⁵ Frank Hansen m.fl., Lineær algebra, Akademisk Forlag, 1999, s.205f

Bilag 2: Laplaces udviklingssætning (1772).

Vi får brug for en hjælpesætning:

Sætning 11²⁶. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$. Bevis overspringes.

Vi opstiller Laplaces udviklingssætning:

Sætning 12²⁷: Givet en $n \times n$ matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Der gælder så følgende:

$$1) \quad |\mathbf{A}| = a_{r1}C_{r1} + a_{r2}C_{r2} + \dots + a_{rn}C_{rn} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

Determinanten udvikles her efter den r 'te række.

$$2) \quad |\mathbf{A}| = a_{1s}C_{1s} + a_{2s}C_{2s} + \dots + a_{ns}C_{ns} \quad s = 1, 2, \dots, n$$

Determinanten udvikles her efter den s 'te søjle.

Bevis:

Vi viser 2), idet vi betragter $n \times n$ standardmatricen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Vi ser nu på den s 'te søjle i $\mathbf{A}$ og forudsætter, at $s > 1$.

Vi ombytter så denne søjle med dens venstre nabosøjle $s-1$ gange og opnår derved, at søjlen flyttes hen som søjle 1. Vi har nu fået en ny matrix $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1s} & a_{11} & \cdots & a_{1(s-1)} & a_{1(s+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2s} & a_{21} & \cdots & a_{2(s-1)} & a_{2(s+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ns} & a_{n1} & \cdots & a_{n(s-1)} & a_{n(s+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

²⁶ Frank Hansen m.fl., Lineær algebra, Akademisk Forlag, 1999, s.205 ø

²⁷ Frank Hansen m.fl., Lineær algebra, Akademisk Forlag, 1999, s.207

Ved disse $s-1$ ombytninger ændres $|\mathbf{A}|$'s fortegn efter sætning 3:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= (-1)^{s-1} \cdot |\mathbf{B}| \\
 &= (-1)^{s-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \cdot |M_{k1}| \quad [\mathbf{B} \text{ udviklet efter 1. søjle}] \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+s} a_{ks} \cdot |M_{ks}| \quad \left[\begin{array}{l} (-1)^{s-1} \cdot (-1)^{k+1} = (-1)^{s-1+k+1} = (-1)^{k+s} \\ \text{1. søjle i } \mathbf{B} \text{ er den } s\text{'te i } \mathbf{A} \end{array} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ks} C_{ks} \quad [(-1)^{k+s} \cdot |M_{ks}| = C_{ks}]
 \end{aligned}$$

Vi ved fra tidligere, at produktsummen af et element i $\mathbf{A}$ gange dets komplement er lig determinanten til $\mathbf{A}$. Vi har hermed bevist 2).

Vi ser så på den transponerede matrix til $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}'$. I denne er søjlerne i $\mathbf{A}$ blevet til rækkerne i $\mathbf{A}'$. Udvikler vi nu efter første søjle i $\mathbf{A}'$ på samme måde som i 1), får vi efter sætning 11 også det samme resultat som i 1).

Vi har dermed også bevist 2).

QED

Bilag 3: Eksempel på beregning af invers matrix.

Givet $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vi ønsker at bestemme den inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Vi finder den adjungerede ved først at danne komplementerne til $\mathbf{A}$:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -26$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -32$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 43$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Vi bruger disse komplementer til at beregne $|\mathbf{A}|$, idet vi udvikler efter 3 søjle:

$$|\mathbf{A}| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} = 0 + 2 \cdot 43 + 4 \cdot (-26) = -18$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{|\mathbf{A}|} = -\frac{1}{18}$$

Vi danner så den inverse matrix ved at gange den adjungerede matrix til $\mathbf{A}$ med $\frac{1}{|\mathbf{A}|}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj}\mathbf{A} = -\frac{1}{18} \cdot \begin{bmatrix} -10 & -32 & 16 \\ -6 & -12 & 6 \\ 14 & 43 & -26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & 1\frac{7}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{9} & -2\frac{7}{18} & 1\frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Bilag 4: Beregning af $|\mathbf{A}|$ i Opgave 1).

Vi anvender rækkeoperationer og derefter udvikler vi efter rækker/søjler.

Læg -1 gange række 2 til række 4, læg derefter -1 gange søjle 2 til søjle 1:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -5 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Læg -1 gange søjle 1 til søjle 5, læg derefter -4 gange søjle 5 til søjle 2:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi kan nu med fordel udvikle efter 4. række:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+5} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Læg 1 gange række 3 til række 4, læg derefter -2 gange række 1 til række 3, læg derefter 3 gange række 1 til række 2:

$$|\mathbf{A}| = - \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 15 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & -13 & 18 & -17 \\ 0 & 15 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Vi kan nu med fordel udvikle efter 1. søjle:

$$|\mathbf{A}| = -(-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -13 & 18 & -17 \\ 15 & -9 & 9 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-12}}$$

Bilag 5: Beregning af $|\mathbf{A}|$ i Opgave 2):

Vi anvender rækkeoperationer til at omskrive determinanten:

Læg 2 gange række 2 til række 3:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 1 & 6 \\ 6 & 7 & -5 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & -2 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ 13 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & -5 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & -2 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

Læg 2 gange række 1 til række 5:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ 13 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & -5 & 4 & 3 \\ 13 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi bemærker nu, at række 3 og række 5 er ens. Af sætning 4 følger derfor, at $|\mathbf{A}|=0$.

Bilag 6: Kildekode til TI83-program til løsning af n ligninger med n ubekendte.

ClrHome

{ spørger efter n + sætter dimensionen af $[A]$ til $n \times n$ + rydder lister }

Disp "n LIGNINGER", "MED n UBEKENDTE:", ""

Input "n=", N

{N,N)!dim([A])

ClrList LA

ClrList LB


{ spørger efter den X 'te koefficient i den Y 'te ligning (hvor X og Y begge løber fra 1 til n). Indsættes på plads (X,Y) i $[A]$ + spørger efter konstantleddet i den Y 'te ligning (indsættes i liste A på plads Y) }

For (Y,1,N)

ClrHome

Disp "LIGNING NR.", "ax₁+bx₂+cx₃...=0", "", "INDTAST", "KOEFFICIENTERNE", "(a=1.,b=2. OSV.)"

Output(1,13,Y)

Output(8,10,"[ENTER]")

Pause

ClrHome

For (X,1,N)

ClrHome

If X>9

Then

Disp " . KOEFFICIENT:"

Else

Disp " . KOEFFICIENT:"

End

Output(1,1,X)

Input A

A![A](Y,X)

End

ClrHome

Disp "ax₁+bx₂+cx₃...=0", "", "INDTAST", "KONSTANTEN (0):"

Input "0=", A

A!LA(Y)

End

ClrHome

Disp "TO SEKUNDER..."


{ stopper programmet og giver besked, hvis $\det([A])=0$ }

If det([A])=0

Then

ClrHome

DelVar [A]

Disp "SORRY...", "det([A])=0!!!", "", "PUKKELARBEJDE", "ENESTE UDVEJ..."

Pause

Stop

End

det([A])!A

1!P

{ kopierer $[A]$ til $[B]$, indsætter konstantleddene i den Y 'te søjle i $[B]$, gemmer $\det([B])$ på plads X i liste B }

For (X,1,N)

[A]![B]

For (Y,1,N)

LA(Y)! [B](Y,P)

End

det([B])!LB(X)

P+1!P

End

{ dividerer liste B med $\det([A])$ og gemmer løsningerne i liste B }

LB/A!LB

{ viser løsningerne: under 6 løsn. vises på ét skærbillede, ellers vises 5 på det første og 6 på de efterfølgende skærbilleder }

```
ClrHome
Disp "LøSNINGER:", "(x<, x∈, x< ...)"
If N<6
Then
For (X,1,N)
Disp LB(X) ,Frac
End
Pause
Stop
End
If N>5
Then
0!Q
0!P
Repeat P=N
P+1!P
Disp LB(P) ,Frac
Q+1!Q
If Q=5
Then
Output(8,15,"->")
Pause
ClrHome
-1!Q
End
End
Output(8,10,"[ENTER]")
Pause
End
Stop
```

Anders Bjerg Pedersen