KomAn - Aflevering 1

Anders "Bongo" Bjerg Pedersen
070183

15. februar 2006

1.8

Lad $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C},\ f(x+iy) = u(x) + iv(y),\ u, v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Vi skal da vise, at $f(z)$ er på formen $f(z) = \lambda z + c,\ \lambda \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{C}$.

Da f er holomorf i $\mathbb{C}$, er f specielt differentiabel i hele $\mathbb{C}$ og Cauchy-Riemanns differentialligninger er opfyldt, jævnfør 1.6. Men da u kun afhænger af x, og v kun afhænger af y, kan $f'(z)$ ikke afhænge af nogen af dem, da Cauchy-Riemanns differentialligninger ellers ikke ville være opfyldt.
Derfor må $f'(z)$ være konstant, altså $f'(z) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Men ifølge 1.6 er så

$$f'(z) = u'(x) = v'(y) = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da vi nu er kommet tilbage til det reelle tilfælde, må

$$\begin{aligned} u'(x) = \lambda &\Rightarrow u(x) = \lambda x + a,\ a \in \mathbb{R} \\ v'(y) = \lambda &\Rightarrow v(y) = \lambda y + b,\ b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vender vi nu tilbage til $f(z)$, får vi, at

$$f(z) = u(x) + iv(y) = (\lambda x + a) + i(\lambda y + b) = \lambda(x+iy) + (a+bi) = \lambda z + c,$$

hvor $z = x + iy$, og $c = a + ib$.

1.10

a)

Vi udleder de to formler under gentagen brug af Eulers formler:

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1 - e^{-iz_1}}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2 + e^{-iz_2}}}{2} + \frac{e^{iz_1 + e^{-iz_1}}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2 - e^{-iz_2}}}{2i} \\ &= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1+z_2)}}{2i} \\ &= \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1+e^{-iz_1}}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2+e^{-iz_2}}}{2} + \frac{e^{iz_1-e^{-iz_1}}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2-e^{-iz_2}}}{2i} \\
&= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} + 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4} \\
&= \cos(z_1 + z_2).
\end{aligned}
$$

b)

Og til sidst idiotformlen for komplekse tal (igen under brug af Eulers formler):

$$
\begin{aligned}
(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{4}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1.
\end{aligned}
$$