KomAn - Aflevering 2

Anders “Bongo” Bjerg Pedersen
070183

8. marts 2006

Problem 2.1

(i)

Vi ser klart, at $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, og $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Desuden er $\mathbb{C}$ selvfølgelig enkeltsammenhængende, så ifølge 3.5 har f en stamfunktion. Lad $\gamma : [0; z] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = tz,\ t \in [0; 1]$ være givet. Via 2.13 får vi så, at

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^1 f(tz)z\ dt \\
&= z\int_0^1 tz\cos(tz) + \sin tz\ dt \\
&= z^2\int_0^1 tz\cos(tz) + z\int_0^1 \sin tz\ dt \\
&= \left[\frac{\cos(tz) + tz\sin(tz)}{z^2}\right]_0^1 + z\left[-z^{-1}\cos(tz)\right]_0^1 \\
&= \cos z + z\sin z - 1 - (\cos z - 1) = z\sin z.
\end{aligned}$$

Altså er alle f’s stamfunktioner på formen $z\sin z + k,\ k \in \mathbb{C}$.

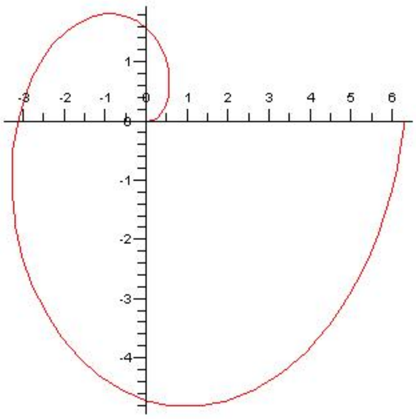
(ii)

Vi integrerer:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x\cos(x) + \sin(x)\ dx &= \int_0^{2\pi} x\cos(x)\ dx + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx}_{=0} \\
&= [x\sin(x)]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(x)\ dx}_{=0} + 0 \\
&= 0 - 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

(iii)

Lad $\gamma : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ med $\gamma(t) = te^{it} = t(\cos t + i\sin t) = t\cos t + it\sin t = x(t) + iy(t)$. Jævnfør Definition 2.7 har vi så, at



Figur 1: Skitse af $\gamma(t) = te^{it}$.

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + 2t\sin t\cos t}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2}\ dt.
\end{aligned}$$

(iv)

Da $f(z)$ er kontinuert, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ og f har stamfunktion $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, får vi fra sætning 2.11, at

$$\int_\gamma f(z)\ dz = F(2\pi) - F(0) = 2\pi\sin(2\pi) - 0 = 0 - 0 = 0.$$

4.17

(a)

Lad z_0 være en rod i polynomiet $f(z)$, som defineret i opgaveteksten. Antag $z_0 = 0$. Jævnfør 4.22 vil division af $f(z)$ med $(z - z_0) = z$ så gå op. Men da $a_0 = a_n \neq 0$, har vi, at $z \nmid a_0 \neq 0$. Altså går divisionen *ikke* op, og vi har en modstrid, altså er $z_0 \neq 0$.

Antag nu, at $z_0 \neq 0$ er rod i $f(z)$ som før defineret, dvs. $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z_0^k = 0$. Vi regner:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z_0^k = 0 \Leftrightarrow z_0^{-n} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z_0^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z_0^{k-n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \left(\frac{1}{z_0}\right)^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{z_0}\right)^{n-k} = 0,$$

da $a_{n-k} = a_k$. Men da giver symmetrien i polynomiet os nu, at så er $1/z_0$ også en rod.

(b)

$f(z) = 2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2$ er af formen fra (a). Dvs. da $z = 2$ er rod, er også $z = \frac{1}{2}$ rod, og division af $f(z)$ med $(z-2)(z-\frac{1}{2}) = z^2 - \frac{5}{2}z + 1$ går op:

$$\begin{array}{c|ccccccccc|c}
z^2 - \frac{5}{2}z + 1 & 2z^4 & - & 3z^3 & - & z^2 & - & 3z & + & 2 & 2z^2 + 2z + 2 \\
\hline
 & 2z^4 & - & 5z^3 & + & 2z^2 & & & & & \\
 & & & 2z^3 & - & 3z^2 & - & 3z & + & 2 & \\
 & & & 2z^3 & - & 5z^2 & + & 2z & & & \\
 & & & & & 2z^2 & - & 5z & + & 2 & \\
 & & & & & 2z^2 & - & 5z & + & 2 & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Vi løser så:

$$2z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{4-1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Vi finder altså, at alle fire rødder i polynomiet $f(z) = 2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2$ er:

$$\left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$