MI Obligatorisk opgave 1

Anders “Bongo” Bjerg Pedersen

11. september 2005

Opgave 1

1.1

a)

Da en σ-algebra er stabil over for tællelig forening af en følge af *vilkårlige* delmængder, vil den også være det over for en følge af *voksende* delmængder. Dvs. en σ-algebra er opad kontinuert.

b)

Da en σ-algebra er stabil overfor komplementærmængdedannelse og tællelig forening af en følge af vilkårlige delmængder, kan vi bruge de Morgans love til at omskrive:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\complement} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\complement}.$$

Men hvis $A_i \in \sigma$-algebraen, er også $A_i^{\complement}$, og jævnfør førnævnte stabilitetsegenskaber vil så også $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{\complement}$ ligge der. Dvs. en σ-algebra er nedad kontinuert.

1.2

For en algebra på mængden Ω gælder, at

$$1)\ \Omega \in \mathbb{A}, \quad 2)\ A \in \mathbb{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathbb{A}, \quad 3)\ A, B \in \mathbb{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{A}.$$

Desuden gælder for en σ-algebra på mængden Ω, at

$$1)\ \Omega \in \mathbb{A}, \quad 2)\ A \in \mathbb{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathbb{A}, \quad 3)\ A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}.$$

Vi skal altså, idet vi antager, at algebraen er opad kontinuert, vise betingelse 3) for σ-algebraen.

Lad $\mathbb{A}$ være en *opad* kontinuert algebra på en mængde Ω, og lad $A_1, A_2, \ldots$ være en tilfældig følge af $\mathbb{A}$-delmængder. Vi konstruerer nu en ny følge, $B_1, B_2, \ldots$, hvor $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{A}$, der er en følge af endelige foreninger

af $\mathbb{A}$-delmængder. Enhver B-mængde ligger per definition i algebraen, og følgen $B_1, B_2, \ldots$ ses klart at være voksende, $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$. Derfor vil $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{A}$ (jævnfør antagelsen om opad-kontinuitet).
Men da der oplagt gælder, at $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}$, har vi vist betingelse 3) for en vilkårlig følge af $\mathbb{A}$-delmængder, og derfor er $\mathbb{A}$ en σ-algebra.

1.3

Lad nu $\mathbb{A}$ være en *nedad* kontinuert algebra på en mængde Ω og lad $B_1, B_2, \ldots$ være en voksende følge som i 1.2. På grund af $\mathbb{A}$'s stabilitetsegenskaber mht. komplementærmængder kan vi tage komplementærmængden til hver af B_i'erne, så vi i stedet får en aftagende følge: $B_1^{\complement} \supset B_2^{\complement} \supset \ldots$. Vi ved, at grundet nedad-kontinuiteten vil $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{\complement} \in \mathbb{A}$. Anvender vi de Morgans love på dette udtryk, får vi:

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{\complement} \right)^{\complement} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}.$$

Igen har vi vist betingelse 3) for en vilkårlig følge af $\mathbb{A}$-delmængder, og derfor er $\mathbb{A}$ en σ-algebra.

Opgave 2

2.1

Per definition vil $\Delta_{xr} \subset B(x,r)^{-}$, da der netop er tale om en trekant, der har sine tre spidser liggende *på* cirkelen med radius r og centrum i x, altså den lukkede kugle $B(x,r)^{-}$.

Vi laver nu en opdeling af den indskrevne trekant som på Figur 1 nedenfor. Vi kan nu regne lidt på længden af siden a:

$$\sin(30^\circ) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} r.$$

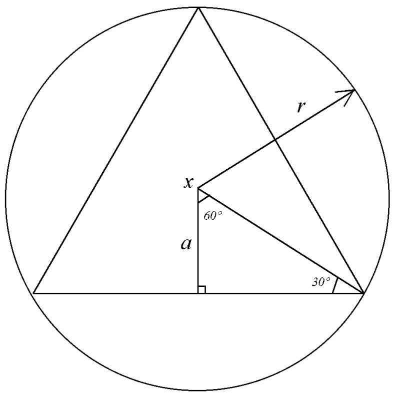
Har vi altså en given åben kugle med centrum i x og radius $r/2$, $B(x, \frac{r}{2})$, vil denne netop kunne ligge helt inde i trekanten. Der gælder derfor, at $B(x, \frac{r}{2}) \subset \Delta_{xr}$.

2.2

Vi skal vise:

$$\mathbb{E} = \sigma(\{\Delta_{xr} \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}) \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2.$$

Det er her nok at vise, at $\{\Delta_{xr} \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\} \subset \sigma(\mathbb{O}_2)$.



Figur 1: Hjælpetegning til ligesidet trekant

Lad $B(x,r)^-$ være en afsluttet kugle, så er $B^{\complement}$ åben, og $B^{\complement} \in \mathbb{B}_2$, da $\mathbb{B}_2$ er frembragt af $\mathbb{O}_2$, dvs. specielt også indeholder $\mathbb{O}_2$. Da $\mathbb{B}_2$ er stabil over for komplementærmængdedannelse, er $B = (B^{\complement})^{\complement} \in \mathbb{B}_2$.

Vi har så fra 2.1, at $\Delta_{xr} \subset B(x,r)^-, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0$, dvs.:

$$\mathbb{E} = \sigma(\{\Delta_{xr} \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}) \subset \sigma(\{B(x,r)^- \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}) \subset \sigma(\mathbb{O}_2) = \mathbb{B}_2.$$