MI/Sand1 2005
Obligatorisk opgave 2

Navn: **Anders Bjerg Pedersen**

CPR: **070183-XXXX**

Instruktor : **Jens Ulrik Hansen**

Antal sider : **7 (inkl. forside)**

Jeg erklærer hermed at jeg selv har udarbejdet denne besvarelse.

Dato Navn

Opgave 1

a)

Vi deler op i følgende tilfælde og finder antallet af løsninger til ligningen i hvert tilfælde:

$\underline{a \neq 0:}$ 1) ingen hvis $b^2 - 4ac < 0$
2) 1 hvis $b^2 - 4ac = 0$
3) 2 hvis $b^2 - 4ac > 0$

$\underline{a = 0:}$ Vi deler igen op i to nye tilfælde:

$\underline{b = 0:}$ To tilfælde igen:

$\underline{c \neq 0:}$ 0 løsninger
$\underline{c = 0:}$ uendelig mange løsninger!

$\underline{b \neq 0:}$ 1 løsning

Altså kan f antage værdierne $0, 1, 2, \infty$.

b)

Vi skal vise, at følgende mængder ligger i $\mathbb{B}_3$:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(0) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac < 0) \vee (a = b = 0 \wedge c \neq 0)\} \\
f^{-1}(1) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac = 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0)\} \\
f^{-1}(2) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac > 0\} \\
f^{-1}(\infty) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c = 0\}
\end{aligned}$$

Vi kan dog skrive lidt om på disse mængder:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(0) &= \big(\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0\} \cap \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b^2 - 4ac < 0\}\big) \\
&\quad \cup \{(0,0,c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \\
f^{-1}(1) &= \big(\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0\} \cap \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b^2 - 4ac = 0\}\big) \\
&\quad \cup \{(0,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, c \in \mathbb{R}\} \\
f^{-1}(2) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0\} \cap \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b^2 - 4ac > 0\} \\
f^{-1}(\infty) &= \{(0,0,0)\} \in \mathbb{B}_3
\end{aligned}$$

Ovenstående mængder på højresiden af lighedstegnene er alle åbne eller afsluttede mængder, der derfor ligger i $\mathbb{B}_3$, og da $\mathbb{B}_3$ er stabil overfor fællesmængdedannelse og foreningsmængdedannelse, vil ovenstående originalmængder også ligge i $\mathbb{B}_3$, og derfor har vi ifølge 4.1, at f er en målelig funktion, der antager værdier i $[0; \infty]$. Derfor er $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}_3)$.

Opgave 2

Se på en vilkårlig åben mængde $D \in \mathbb{R}$. Dan mængden $A = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n^{-1}(D) \neq \emptyset\} \in \mathbb{E}$. Vi ser nu, at $f^{-1}(D) = \bigcup_{n \in A} \{n\} \times f_n^{-1}(D)$ (lighedstegnet gælder per konstruktion). Kan vi vise, at denne forening ligger i $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E}$, har vi løst opgaven. Men da der oplagt gælder, at $\{n\} \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ og $f_n^{-1}(D) \in \mathbb{E}$, kan vi ved hjælp af sætning 4.21 konkludere, at de to mængder endda ligger i et frembringersystem for $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E}$, og derfor selvfølgelig også ligger i $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E}$ selv. Da $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E} - \mathbb{B}$ er en σ-algebra, ligger den tællelige forening der altså også.
Derfor er f ifølge definition 4.1 $\mathbb{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{E} - \mathbb{B}$-målelig.

Opgave 3

3.1

Vi har at gøre med målrummet $(\mathcal{X}, \mathbb{E}, \mu) = (]0; \infty[, \mathbb{B}, m)$. Sæt nu

$$f_n(x) = \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{n}} - x \right) e^{-x^2}.$$

Vi ser nu, at da vi kun ser på positive værdier af x, vil $\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{n}} - x \right) \leq 1$, og derfor er

$$\int_0^\infty |f_n(x)| \; dx \leq \int_0^\infty |e^{-x^2}| \; dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} < \infty.$$

Altså har vi fundet en kontinuert, målelig integrabel majorant for f_n-funktionerne, og integralet giver altså mening for alle $n \in \mathbb{N}$.

Sæt nu $f(x) = 0$, da for et fast $x \in]0; \infty[$ vil

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{n}} - x \right) = |x| - x = 0,$$

dvs. $f_n \to f$ punktvist. Per 5.27 vil så

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) \; dx = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x) \; dx = \int_0^\infty f(x) \; dx = 0.$$

Dvs. I_n konvergerer for $n \to \infty$ med grænseværdien 0.

3.2

Vi har at gøre med målrummet $(\mathcal{X}, \mathbb{E}, \mu) = (] - \infty; \infty[, \mathbb{B}, m)$. Sæt nu

$$f_n(x) = \left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{n}} - x \right) e^{-x^2}.$$

Funktionen $(2|x|+1)e^{-x^2}$ er en kontinuert målelig majorant til f_n-funktionerne, da hvis vi ser på $\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{n}}-x\right)$, er 1 majorant, når $x\in]0;1]$ og $2|x|$ er majorant, når $x\notin]0;1]$. Derfor er $(2|x|+1)e^{-x^2}$ majorant for $f_n(x)$.

Vi ved fra 3.1, at $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\ dx = 0$, altså kan vi nøjes med at se på integralet fra $-\infty$ til 0:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0}(2|x|+1)e^{-x^2}\ dx &= 2\int_{-\infty}^{0}|x|e^{-x^2}\ dx+\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2}\ dx\\
&= 2\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2}\ dx+\int_{-\infty}^{0}e^{-x^2}\ dx\\
&= 1+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}<\infty.
\end{aligned}$$

Hvor vi undervejs har brugt, at e^{-x^2} er symmetrisk omkring y-aksen. Altså giver integralet mening, da der findes en integrabel majorant.

Vi bruger nu Lebesgues majorantsætning til at finde værdien af integralet:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{n}}-x\right)e^{-x^2}\ dx &= \int_{-\infty}^{0}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2-\frac{1}{n}}-x\right)e^{-x^2}\ dx\\
&= \int_{-\infty}^{0}(|x|-x)e^{-x^2}\ dx=\int_{-\infty}^{0}-2xe^{-x^2}\ dx\\
&= \int_{-\infty}^{0}e^{t}\ dt=1,
\end{aligned}$$

hvor vi i næstsidste lighedstegn har substitueret $t=-x^2$.

Opgave 4

4.1

Kan vi vise, at $f_n(x)$ er kontinuert, er $f_n(x)$ specielt også målelig. $f_n(x)$ består af stykkevist kontinuerte funktioner, dvs. funktionerne $-n, f(x), n$ er alle tre kontinuerte. Sæt nu $A_1=]-\infty;-n[$, $A_2=[-n;n]$, $A_3=]n;\infty[$. Da giver "Tuborg-lemmaet"(4.6), at

$$f_n(x)=\begin{cases}-n & \text{hvis } f(x)\in A_1\\ f(x) & \text{hvis } f(x)\in A_2\\ n & \text{hvis } f(x)\in A_3\end{cases}$$

så også er kontinuert.

4.2

Vi viser implikationen begge veje:

$\Rightarrow$: Antag, at f er integrabel mht. m på $\mathbb{R}$. Vi ved fra 4.1, at $f \in \mathcal{M}$. Derfor giver 5.23, at $\int |f| \ dm < \infty$. Men da $f_n \nearrow f$, vil $\int |f_n| \ dm \leq \int |f| \ dm < \infty$, og derfor vil også $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| \ dm \leq \int |f| \ dm < \infty$.

$\Leftarrow$: Antag, at $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| \ dm < \infty$. Vi skal så vise, at f er integrabel mht. m på $\mathbb{R}$.
Se på

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n| \ dm = \int \lim_{n \to \infty} |f_n| \ dm = \int |f| \ dm \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| \ dm < \infty,$$

hvor vi i første lighedstegn har brugt 5.27 med $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| \ dm$ som integrabel majorant.
Men så giver 5.23, at også f er integrabel, hvis og kun hvis $|f|$ også er det.

Opgave 5

5.1

Vi ønsker først at finde $\mu(\mathbb{R})$. Jfr. definition 7.6 er $\mu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \ d\mu$, men da $\int_{-\infty}^{0} f(y) \ d\mu = 0$, kan vi nøjes med at se på $\int_{0}^{\infty} f(y) \ d\mu$ (vi regner med Lebesguemålet, så vi kan uden videre skrive dy i stedet for $d\mu$):

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{y} e^{\frac{-(\log y)^2}{2}} \ dy = \lim_{n \to \infty} \int_{\log \frac{1}{n}}^{\log n} e^{\frac{-x^2}{2}} \ dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \ dx = \sqrt{2\pi}.$$

Idet vi i første lighedstegn har substitueret $x = \log y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{y} \ dy$.

Vi skal nu finde $\mu(]0;1[)$. Vi bruger igen 7.6:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{y} e^{\frac{-(\log y)^2}{2}} \ dy = \lim_{n \to \infty} \int_{\log \frac{1}{n}}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}} \ dx = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}} \ dx.$$

Hvor vi igen har brugt den samme substitution som før. Men da $e^{\frac{-x^2}{2}}$ er symmetrisk omkring y-aksen, er nu

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}} \ dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \ dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}.$$

5.2

Vi ser, at da $y > 0$, er $y^k > 0$, og da y^k er kontinuert på $\mathbb{R}$, er $y^k \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Vi kan nu bruge 7.9 til at transponere målet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^k \, d\mu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y) \, dm(y) = \int_0^{\infty} y^k f(y) \, dy \quad (f(y) = 0, \ y \leq 0).$$

Brug nu udregningerne i eksempel 13.24 i bogen med $\sigma = 1$ og substituér $z = \log y$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^{k-1} e^{\frac{-(\log y)^2}{2}} \, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{kz} e^{\frac{-z^2}{2}} \, dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{kz} e^{\frac{-(z-k)^2}{2}} \, dz \\ &= e^{\frac{k^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} \, dy = \sqrt{2\pi} e^{\frac{k^2}{2}}, \end{aligned}$$

hvor vi i næstsidste lighedstegn har substitueret $y = z - k$ (grænserne forbliver uændrede ved denne substitution!).

Opgave 6

6.1

Lad $t \in]-R; R[$ og sæt $f_n(x) = \cos(tx) e^{\frac{-x^2}{2}}$. Da $|\cos(tx)| \leq 1$, er

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| \, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx = \sqrt{2\pi} < \infty.$$

Da $f_n(x)$ desuden er kontinuerte (og dermed målelige), giver definitionen af ϕ mening.

Sæt $f(x,t) = \cos(tx) e^{\frac{-x^2}{2}}$. Da er f_t kontinuert (den er sammensat af kontinuerte funktioner), dvs. f_t er målelig. Det samme gælder for f^x. Vi har også, at $h(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ er integrabel majorant for f_t, og ifølge 6.15 er da ϕ kontinuert på hele $\mathbb{R}$.

6.2

Lad $t \in]-R; R[$. Vi ved, at f_t er målelig og kontinuert. Desuden er $(f^x)'(t) = -x \sin(tx) e^{\frac{-x^2}{2}}$, dvs. f^x er differentiabel på $]-R; R[$.
Men da er $|(f^x)'(t)| \leq |x| e^{\frac{-x^2}{2}}$, så $h(x) = |x| e^{\frac{-x^2}{2}}$ er integrabel majorant for $(f^x)'(t)$. Ifølge 6.17 vil ϕ derfor være differentiabel på $]-R; R[$ (og dermed på hele $\mathbb{R}$) og

$$\phi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -x \sin(tx) e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx.$$

6.3

Vi regner på venstresiden:

$$\begin{aligned}
\phi'(t) = &= \int_{-\infty}^{\infty} -xe^{\frac{-x^2}{2}} \sin(tx)\ dx \\
&= \left[e^{\frac{-x^2}{2}} \sin(tx) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} t \cos(tx)\ dx \\
&= \left(\lim_{x \to \infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \sin(tx) - \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \sin(tx) \right) - t \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx \\
&= 0 - 0 - t \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx = -t\phi(t).
\end{aligned}$$

6.4

Sæt $y = \phi(t)$. Fra opgave 6.3 har vi så, at y løser differentialligningen $y' = -ty$. Derfor er det velkendt, at løsningen er givet ved

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int -t\ dt \Rightarrow \ln y + m = -\left(\frac{1}{2} t^2 + k \right) \Rightarrow \underline{y = c \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2}}.$$

Vi ved, at $\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx = \sqrt{2\pi}$, som vi indsætter i ovenstående udtryk for y for at finde konstanten c:

$$\sqrt{2\pi} = ce^0 \Rightarrow \underline{c = \sqrt{2\pi}}.$$

Altså får vi til sidst, at $\phi(t) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{-t^2}{2}}$.