MI/Sand1 2005

Obligatorisk opgave 3

Navn: **Anders Bjerg Pedersen**

CPR: **070183-XXXX**

Instruktor : **Jens Ulrik Hansen**

Antal sider : **8 (inkl. forside)**

Jeg erklærer hermed at jeg selv har udarbejdet denne besvarelse.

Dato

Navn

Opgave 1

1.1

Vi anvender sætning 14.4 i samspil med 14.3 og tjekker, at $F(x)$ opfylder de fire krav i 14.3:

1) Da e^{-x^2} er aftagende, kan parentesen ikke blive 0 eller negativ, da $x > 0$. Men da er parentesen positiv og voksende, hvilket opløftningen til en positiv eksponent α ikke ændrer ved. Derfor er $F(x)$ voksende.

2) Da $\lim_{x \searrow 0}(1 - e^{-x^2})^\alpha = 0^\alpha = 0 = F(0)$, er $F(x)$ klart kontinuert fra højre.

3) Se på: $\lim_{x\to\infty}(1 - e^{-x^2})^\alpha = \lim_{x\to\infty} 1^\alpha = 1$.

4) Se på: $\lim_{x\to-\infty}(1 - e^{-x^2})^\alpha = \lim_{x\to\infty} 0^\alpha = 0$.

Altså er $F(x)$ ifølge 14.4 en fordelingsfunktion.

1.2

Vi bemærker, at $F(x)$ endda er strengt voksende på $]0;\infty[$, og vi kan se bort fra $]-\infty;0]$, da intet af sandsynlighedsmassen ligger i 0 eller negative værdier. "Efterspillet"til definition 14.11 giver os da, at $I(p) = \{x \in]0;\infty[| F(x) = p\}$. Dvs. for $x > 0$ har vi, at

$$F(x) = p \Rightarrow (1 - e^{-x^2})^\alpha = p \Rightarrow (1 - e^{-x^2}) = p^{1/\alpha} \Rightarrow e^{-x^2} = -p^{1/\alpha} + 1$$
$$\Rightarrow -x^2 = \ln -p^{1/\alpha} + 1 \Rightarrow x = \sqrt{-\ln -p^{1/\alpha} + 1}.$$

Dvs. $I(p) = \sqrt{-\ln -p^{1/\alpha} + 1}$ er vores fraktilfunktion.

Vi løser nu $I(1/2) = 1$ med hensyn til α:

$$I(1/2) = 1 \Rightarrow \sqrt{-\ln((-1/2)^{1/\alpha} + 1)} = 1 \Rightarrow \ln((-1/2)^{1/\alpha} + 1) = -1$$
$$\Rightarrow (-1/2)^{1/\alpha} = e^{-1} - 1 \Rightarrow (1/2)^{1/\alpha} = 1 - e^{-1} \Rightarrow \alpha^{-1} = \frac{\ln(1-e^{-1})}{-\ln(2)}$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{-\ln(2)}{\ln(1-e^{-1})} \approx 1,51.$$

1.3

Jævnfør eksempel 14.5 ser vi på

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2\alpha x e^{-x^2}(1 - e^{-x^2})^{\alpha-1} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Det ses nu, at $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Desuden er $f(x)$ kontinuert, så vi har alt i alt, at $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Derfor har ν tæthed f med hensyn til Lebesguemålet m.

1.4

Vi bruger sætning 11.3 med $\nu = f \cdot m = X(P)$, $f(x) = 2\alpha x e^{-x^2}(1-e^{-x^2})^{\alpha-1}$, $x \in I =]0;\infty[$ og sætter $h(x) = e^{-x^2}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, og $J =]0;1[$.

Vi ser nu, at h afbilder I bijektivt på J (h er strengt aftagende, kontinuert og differentiabel og $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$ og $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$).
Vi finder så $h^{-1}(y)$ for $y > 0$:

$$y = e^{-x^2} \Rightarrow x = \sqrt{-\ln(y)} \Rightarrow h^{-1}(y) = \sqrt{-\ln(y)},$$

som er kontinuert og differentiabel med kontinuert afledt. Dvs. h^{-1} er en C^1-afbildning på J, og derfor er h en C^1-diffeomorfi fra I til J. Desuden er $\nu(I) = \nu(\mathbb{R}) = 1$, er så er kravene i sætning 11.3 opfyldt, og $h(\nu) = \tilde{f} \cdot m$, hvor

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| & , \quad y \in J \\ 0 & , \quad y \notin J \end{cases},$$

som vi regner på:

$$|(h^{-1})'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{-\ln(y)}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2y\sqrt{-\ln(y)}}$$

$$\begin{aligned} f(h^{-1}(y)) &= 2\alpha\sqrt{-\ln(y)}e^{-\sqrt{-\ln(y)}^2}\left(1 - e^{-\sqrt{-\ln(y)}^2}\right)^{\alpha-1} \\ &= 2\alpha\sqrt{-\ln(y)}(1-y)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Som så giver os, at $Y = e^{-X^2}$ er fordelt med tæthed $\tilde{f}$ mht. Lebesguemålet m, hvor

$$\tilde{f}(y) = \left\{ \begin{matrix} f(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| & , & y \in J \\ 0 & , & y \notin J \end{matrix} \right\} = \begin{cases} \alpha(1-y)^{\alpha-1} & , \quad y \in J \\ 0 & , \quad y \notin J \end{cases}.$$

1.5

a) Vi anvender fremgangsmåden i eksempel 13.3 med $t(y) = y^{-\beta}$ og regner:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t(y)|\tilde{f}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |y^{-\beta}|\alpha(1-y)^{\alpha-1}\,dy = \alpha\int_0^1 y^{-\beta}(1-y)^{\alpha-1}\,dy,$$

som er en B-funktion med parametre $\lambda_1 = 1-\beta$ og $\lambda_2 = \alpha$. Men B-fordelingen har modus i 0 (og dermed endeligt integral), hvis

$$0 < \lambda_1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-\beta < 1 \Leftrightarrow 1 > \beta > 0.$$

Altså har $Y^{-\beta}$ første moment, når $\beta \in]0;1[$.

b) Vi anvender definition 13.1:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\nu(x) &= \int_0^{\infty} x^k 2\alpha x e^{-x^2}(1-e^{-x^2})^{\alpha-1} \, dx \\
(\text{subs. } y = e^{-x^2}) &= \alpha \int_1^0 -\sqrt{-\ln y}^k (1-y)^{\alpha-1} \, dy \\
&= \alpha \int_0^1 \sqrt{-\ln y}^k \underbrace{(1-y)^{\alpha-1}}_{\in]0;1[} \, dy
\end{aligned}$$

Vi ser nu, at $\sqrt{-\ln y}^k \in \mathcal{M}^+(]0;1[,\mathbb{B})$ er majorant for $\sqrt{-\ln y}^k(1-y)^{\alpha-1}$, $y \in]0;1[$ og $\int_0^1 \sqrt{-\ln y}^k \, dy = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}k\right)$, som er endeligt ifølge 6.9. Altså er $\sqrt{-\ln y}^k$ integrabel majorant, og derfor er x^k ν-integrabel, dvs. X har momenter af alle ordener.

1.6

Vi regner:

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^{\infty} x^2 \, dX(P)(x) \\
&= \int_0^{\infty} x^2 2\alpha x e^{-x^2}(1-e^{-x^2})^{\alpha-1} \, dx \\
(\text{subs. } y = 1-e^{-x^2}) &= \alpha \int_0^1 -\ln(1-y) y^{\alpha-1} \, dy \\
&= \alpha \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k} y^{\alpha-1} \, dy \\
&= \alpha \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k+\alpha-1}{k} \, dy \\
(5.10) &= \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^k+\alpha-1}{k} \, dy \\
&= \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha+k)k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha+k)k}
\end{aligned}$$

Opgave 2

a) Da $\int_1^{\infty} f(x)^4 \, dx = \int_1^{\infty} |f(x)|^4 \, dx < \infty$, og $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{B})$ er $f \in \mathcal{L}_4(]1;\infty[,\mathbb{B},m)$.
Sæt nu $h(x) = \frac{1}{x}$ og $p = 4 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} = \frac{4}{3}$ (p, q er duale eksponenter).

Vi skal så vise, at $h \in \mathcal{L}_{4/3}\left(]1;\infty[, \mathbb{B}, m\right)$:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty |h(x)|^{4/3}\, dx &= \int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right|^{4/3} dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\, dx \\
&= \int_1^\infty x^{-4/3}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[-3x^{-1/3}\right]_1^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-3n^{-1/3} + 3(1)^{-1/3}\right) = 3 < \infty
\end{aligned}$$

Altså er $h \in \mathcal{L}_{4/3}\left(]1;\infty[, \mathbb{B}, m\right)$. Men så giver Hölders ulighed os nu, at $g = f \cdot h \in \mathcal{L}\left(]1;\infty[, \mathbb{B}, m\right)$, dvs. $g(x)$ er integrabel mht. til m.

b) Vi bruger nu anden del af Hölders ulighed til at vise den ønskede ulighed:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty |g(x)|\, dx &= \int_1^\infty \left|f(x)\cdot\frac{1}{x}\right| dx \\
&\leq \|f\|_4 \cdot \left\|\frac{1}{x}\right\|_{4/3} \\
&= \left(\int_1^\infty |f(x)|^4\, dx\right)^{1/4} \cdot \left(\int_1^\infty \left|\frac{1}{x}\right|^{4/3} dx\right)^{3/4} \\
&= \left(\int_1^\infty |f(x)|^4\, dx\right)^{1/4} \cdot (3)^{3/4} \\
&= \sqrt[4]{27} \cdot \left(\int_1^\infty |f(x)|^4\, dx\right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

Sætning 5.25 giver os da, at

$$\left|\int_1^\infty g(x)\, dx\right| \leq \int_1^\infty |g(x)|\, dx \leq \sqrt[4]{27} \cdot \left(\int_1^\infty |f(x)|^4\, dx\right)^{1/4}.$$

Opgave 3

3.1

a) Vi viser, at integralerne af funktionerne er endelige for alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int |f_n(x)|\ dx &= \int_n^{n+1} 1\ dx = [x]_n^{n+1} = 1 < \infty \\
\int |g_n(x)|\ dx &= \int_1^n \left|\frac{1}{x}\right|\ dx = [\ln x]_1^n = \ln n < \infty \\
\int |h_n(x)|\ dx &= \int_1^n \left|\frac{1}{x^2}\right|\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} < \infty \\
\int |k_n(x)|\ dx &= \int_n^{n+1} \left|\frac{1}{x}\right|\ dx = [\ln x]_n^{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \infty
\end{aligned}$$

Dvs. alle følgernes elementer er $\mathcal{L}_1(m)$-funktioner.

b) Vi ser på afstandene mellem det n'te og det m'te element i hver af følgerne, hvor $n > m$ og $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_1 &= \int |f_n - f_m|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|1_{(n,n+1)} - 1_{(m,m+1)}\right|\ dx \\
&= \int_n^{n+1} 1\ dx + \int_m^{m+1} 1\ dx = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|g_n - g_m\|_1 &= \int |g_n - g_m|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x}(1_{(1,n)} - 1_{(1,m)})\right|\ dx \\
&= \int_m^n \left|\frac{1}{x}\right|\ dx = \ln n - \ln m.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|h_n - h_m\|_1 &= \int |h_n - h_m|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x^2}(1_{(1,n)} - 1_{(1,m)})\right|\ dx \\
&= \int_m^n \left|\frac{1}{x^2}\right|\ dx = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|k_n - k_m\|_1 &= \int |k_n - k_m|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x}\right| \left|1_{(n,n+1)} - 1_{(m,m+1)}\right|\ dx \\
&= \int_n^{n+1} \left|\frac{1}{x}\right|\ dx + \int_m^{m+1} \left|\frac{1}{x}\right|\ dx \\
&= [\ln|x|]_n^{n+1} + [\ln|x|]_m^{m+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

c) Vi skal her jfr. afsnit 4.4 i noterne afgøre, om afstandene går mod 0 for $n, m \to \infty$:

1) $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_1 = 2$, altså er f_n ikke Cauchy i $\mathcal{L}_1$-forstand.
2) $\lim_{n,m\to\infty} \|g_n - g_m\|_1$: Vi kan ikke gøre afstanden mellem to vilkårlige elementer vilkårligt lille,
altså er g_n ikke Cauchy i $\mathcal{L}_1$-forstand.
3) $\lim_{n,m\to\infty} \|h_n - h_m\|_1 = 0 - 0 = 0$, altså er h_n Cauchy i $\mathcal{L}_1$-forstand.
4) $\lim_{n,m\to\infty} \|k_n - k_m\|_1 = 0 + 0 = 0$, altså er k_n Cauchy i $\mathcal{L}_1$-forstand.

3.2

Samme fremgangsmåde som i 3.1, blot i $\mathcal{L}_2$-forstand:

a) Vi viser, at integralerne af funktionerne er endelige for alle $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\int |f_n(x)|^2\ dx &= \int_n^{n+1} 1\ dx = [x]_n^{n+1} = 1 < \infty \\
\int |g_n(x)|^2\ dx &= \int_1^n \left|\frac{1}{x^2}\right|\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} < \infty \\
\int |h_n(x)|^2\ dx &= \int_1^n \left|\frac{1}{x^4}\right|\ dx = \left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right) < \infty \\
\int |k_n(x)|^2\ dx &= \int_n^{n+1} \left|\frac{1}{x^2}\right|\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} < \infty
\end{aligned}
$$

Dvs. alle følgernes elementer er $\mathcal{L}_2(m)$-funktioner.

b) Vi ser på afstandene mellem det n'te og det m'te element i hver af følgerne, hvor $n > m$ og $n, m \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_2 &= \left(\int |f_n - f_m|^2\ dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_n^{n+1} 1\ dx + \int_m^{m+1} 1\ dx\right)^{1/2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|g_n - g_m\|_2 &= \left(\int |g_n - g_m|^2\ dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x}(1_{(1,n)} - 1_{(1,m)})\right|^2\ dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_m^n \frac{1}{x^2}\ dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|h_n - h_m\|_2 &= \left(\int |h_n - h_m|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x^2}(1_{(1,n)} - 1_{(1,m)})\right|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_m^n \frac{1}{x^4} \, dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{3m^3} - \frac{1}{3n^3}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|k_n - k_m\|_2 &= \left(\int |k_n - k_m|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x}(1_{(n,n+1)} - 1_{(m,m+1)})\right|^2 \, dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} \, dx + \int_m^{m+1} \frac{1}{x^2} \, dx\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}}.
\end{aligned}
$$

c) Vi skal her jfr. afsnit 4.4 i noterne afgøre, om afstandene går mod 0 for $n, m \to \infty$:

1) $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_1 = \sqrt{2}$, altså er f_n ikke Cauchy i $\mathcal{L}_2$-forstand.
2) $\lim_{n,m\to\infty} \|g_n - g_m\|_1 = \sqrt{0-0} = 0$, altså er g_n Cauchy i $\mathcal{L}_2$-forstand.
3) $\lim_{n,m\to\infty} \|h_n - h_m\|_1 = \sqrt{0-0} = 0$, altså er h_n Cauchy i $\mathcal{L}_2$-forstand.
4) $\lim_{n,m\to\infty} \|k_n - k_m\|_1 = \sqrt{0-0+0-0} = 0$, altså er k_n Cauchy i $\mathcal{L}_2$-forstand.