MI/Sand1 2005

Obligatorisk opgave 4

Navn:	**Anders Bjerg Pedersen**
CPR:	**070183-XXXX**
Instruktor :	**Jens Ulrik Hansen**
Antal sider :	**9 (inkl. forside)**

Jeg erklærer hermed at jeg selv har udarbejdet denne besvarelse.

Dato

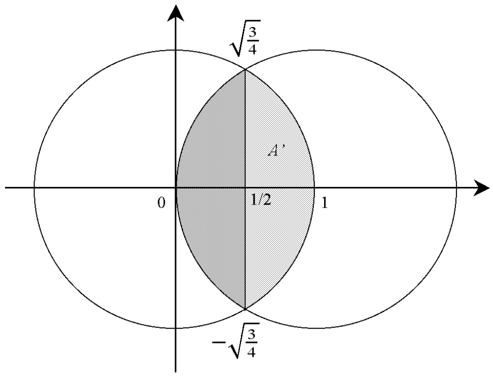
Navn

Opgave 1

De to punktmængders ligninger og forskrifter for randene er givet ved:

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-0)^2 + (y-0)^2 \leq 1\right\} \ , \ y = \pm\sqrt{1-x^2} \\ B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-0)^2 \leq 1\right\} \ , \ y = \pm\sqrt{x(2-x)}. \end{aligned}$$

Randene skærer hinanden to steder i $x = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3/4}\right)$ og $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3/4}\right)$, og punktmængden $A \cap B$ deles altså i to lige store dele i $x = \frac{1}{2}$.



Lad nu en ny mængde, A', være givet ved $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ x \geq \frac{1}{2}\}$ (skraveret med lyseste farve på figuren). Arealet af denne punktmængde er netop halvdelen af arealet af $A \cap B$. Lad nu $f(x,y) = 1_{A'}(x,y) = 1_{A' \cap B}(x,y)$. Da er $f \in \mathcal{M}^+$, og vi kan ved hjælp af Tunellis sætning finde arealet af $A \cap B$:

$$\begin{aligned} 2\int f(x,y)\ dm \otimes m &= 2\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1\ dxdy \\ &= 2\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} [x]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-y^2}}\ dy = \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \frac{2-2y^2}{\sqrt{1-y^2}} - 1\ dy \\ &= \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 1\ dy \\ &= \left[y\sqrt{1-y^2}\right]_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} + [\arcsin(y)]_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} - [y]_{-\sqrt{\frac{3}{4}}}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}}\right) + \frac{2\pi}{3} - \left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

som bliver arealet af $A \cap B$. Ved første lighedstegn har vi brugt sætning Tunellis sætning (8.11).

Opgave 2

Vi kan se på $\int_E |f(x,y)|\ dm_2$, hvor $E = [-1;1] \times [-1;1]$. Dette kan vi gøre vha. Tunellis sætning, da $|f|$ ifølge Tuborg-lemmaet er målelig og klart ikke-negativ, dvs. $|f| \in \mathcal{M}^+$. Vi regner:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy &= \int_{-1}^{1} |y| \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} |y| \left(-\int_{-1}^{0} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\ dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\ dx \right)\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} |y| \left(-\int_{y^2+1}^{y^2} \frac{1}{2t^2}\ dt + \int_{y^2}^{y^2+1} \frac{1}{2t^2}\ dt \right)\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} |y| \int_{y^2}^{y^2+1} \frac{1}{t^2}\ dtdy \\
&= \int_{-1}^{1} |y| \left[\frac{-1}{t} \right]_{y^2}^{y^2+1}\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} |y| \left(\frac{-1}{y^2+1} + \frac{1}{y^2} \right)\ dy \\
&= \infty\ \text{, da } \lim_{y \to 0} \frac{|y|}{y^2} = \infty.
\end{aligned}$$

hvor vi ved tredje lighedstegn har substitueret $t = x^2 + y^2$. Vi finder altså, at f *ikke* er integrabel over E, og vi kan derfor heller ikke anvende Fubinis sætning til at udregne en eventuel fælles værdi af integralerne, og må derfor regne dem efter ved håndkraft.

Vi bemærker dog først, at integralerne (hvis de eksisterer!) må være ens, da f har den egenskab, at det er ligegyldigt, hvilken variabel man integrerer efter først:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy &= \int_{-1}^{1} y \int_{-1}^{1} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\ dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} y \int_{y^2+1}^{y^2+1} \frac{1}{2t^2}\ dtdy \\
&= \int_{-1}^{1} y \cdot 0\ dy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

som bliver den fælles værdi af de to integraler. Ved andet lighedstegn har vi igen substitueret med $t = x^2 + y^2$. Altså eksisterer begge integraler, og de har den fælles værdi 0.

Opgave 3

3.1

Vi ser først, at $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, da f er kontiniuert (og dermed målelig), og

$$\begin{array}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|x|}\right| \; dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \; dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x} \; dx \\ = 2\lim_{n\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^n = 2(0+1) = 2 < \infty.\end{array}$$

Vi kan så finde den Fourier-transformerede af f:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-|x|} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-i\xi x} e^{x} \; dx + \int_{0}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x} \; dx \\
&= \int_{\infty}^{0} -e^{i\xi t} e^{-t} \; dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\xi t} e^{-t} \; dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{i\xi t} e^{-t} \; dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\xi t} e^{-t} \; dt \\
&= \int_{0}^{\infty} \left(e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}\right) e^{-t} \; dt \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \cos(\xi t) e^{-t} \; dt.
\end{aligned}$$

Som efter passende variabelskift giver det ønskede resultat. Vi har ved tredje lighedstegn substitueret $t = -x$.

Vi regner nu igen på den Fourier-transformerede af f, idet vi integrerer partielt to gange:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= 2\int_{0}^{\infty} \cos(\xi x) e^{-x} \; dx \\
&= 2\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\xi}\sin(\xi x) e^{-x}\right]_0^n}_{=0} - \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi}\sin(\xi x)\left(-e^{-x}\right) \; dx\right) \\
&= -2\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi}\sin(\xi x)\left(-e^{-x}\right) \; dx \\
&= -2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-x}(\cos(\xi x)\xi - \sin(\xi x))}{(1+\xi^2)\xi}\right]_0^n \\
&= -2\left(0 - \frac{e^{0}(\cos(0)\xi - \sin(0))}{(1+\xi)^2\xi}\right) \\
&= -2\left(\frac{-1(\xi - 0)}{\xi(1+\xi^2)}\right) = \frac{2}{1+\xi^2}.
\end{aligned}$$

3.2

Vi skal nu gøre rede for, at f opfylder betingelserne i Fouriers inversionssætning (8.8*). Vi ved, at $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Vi skal så vise, at $f \in C_b(\mathbb{R})$ og $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

f er klart kontinuert og begrænset, da den kun antager værdier i $]0;1]$, altså er $f \in C_b(\mathbb{R})$. Vi regner lidt på

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2}{1+\xi^2} \right| \, d\xi &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\xi^2} \, d\xi \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} [\arctan(\xi)]_{-n}^{n} = 2\pi < \infty.
\end{aligned}$$

Altså er $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, og dermed opfylder f betingelserne for at bruge inversionssætningen.

Vi ser nu, at $\widehat{f} = 2g \Rightarrow g = \frac{1}{2}\widehat{f}$. Dette medfører så, at $\mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}\widehat{f}\right) = \frac{1}{2}f$, da Fourier-transformationen er lineær. Vi kan så regne på

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} g(x) \, dx && (1) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} -e^{-i\xi t} g(-t) \, dt && (2) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} g(t) \, dt && (3) \\
&= \frac{1}{2\pi} \widehat{g}(t) = \frac{1}{2} f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}, && (4)
\end{aligned}$$

hvilket medfører, at

$$\frac{1}{2\pi}\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{2}e^{-|\xi|} \Rightarrow \widehat{g}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$$

som ønsket. Vi har i (3) benyttet, at g er en lige funktion, dvs. $g(-t) = g(t)$, og i (2) har vi substitueret $t = -x$.

3.3

a) Vi regner for $a > 0$ på

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(ax)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(ax) \, dx && (5) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} e^{-i\frac{\xi}{a}t} f(t) \, dt && (6) \\
&= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} e^{-i\frac{\xi}{a}t} f(t) \, dt && (7) \\
&= \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right), \ a > 0, && (8)
\end{aligned}$$

hvor vi i (6) har substitueret $t = ax$, hvorved grænserne forbliver uændrede, da $a > 0$.

b) Lad for $a > 0$ være givet

$$h(x) = \frac{1}{1+(ax)^2} = g(ax).$$

Da får vi, at

$$\mathcal{F}(h(x)) = \mathcal{F}(g(ax)) = \frac{1}{a}\widehat{g}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a}\pi e^{-\left|\frac{\xi}{a}\right|} = \frac{\pi}{a}e^{-\left|\frac{\xi}{a}\right|}\ ,\ a > 0.$$

Opgave 4

4.1

Fra antagelse c. og at $|e^{-i\xi x}| \leq 1$ ved vi, at $V(\xi, y) < \infty$. Vi kan altså anvende $|u(x, y)|$ som integrabel majorant for V, og derfor er V veldefineret.

For at vise kontinuiteten går vi frem som i beviset for sætning 6.15 i bogen og antager $(\xi_n, y_n) \to (\xi_o, y_0)$ for $n \to \infty$ og skal så vise, at
$V(\xi_n, y_n) \to V(\xi_0, y_0)$.

Sæt nu

$$|g_n(x)| = \left|e^{-i\xi_n x}u(x, y_n) - e^{-i\xi_0 x}u(x, y_0)\right| \leq u(x, y) + u(x, y) = 2u(x, y)$$

Da $u(x, y)$ er integrabel, følger det af majorantsætningen, at så er $g_n(x)$ det også, og da $(\xi_n, y_n) \to (\xi_o, y_0)\ ,\ n \to \infty$, vil $\int g_n(x)\ dx \to 0$.

Men da

$$\begin{aligned} V(\xi_n, y_n) - V(\xi_0, y_0) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_n x}u(x, y_n)\ dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_0 x}u(x, y_0)\ dx \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\ dx, \end{aligned}$$

får vi så, at $V(\xi_n, y_n) - V(\xi_0, y_0) \to 0$ for $n \to \infty$.

Vi har nu gennemført beviset for 6.15 i bogen for $V(\xi, y)$, og derfor er $V(\xi, y)$ kontinuert.

4.2

Vi regner på differentialligningen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}u(x,y)\ dx && (9)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\ dx && (10)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\ dx && (11)\\
&= \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right)(\xi,y) && (12)\\
&= \mathcal{F}_x\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\right)(\xi,y) && (13)\\
&= i^2\xi^2\cdot(-1)\cdot\widehat{u}(\xi,y) && (14)\\
&= \xi^2\widehat{u}(\xi,y) = \xi^2 V(\xi,y), && (15)
\end{aligned}$$

hvor vi undervejs har brugt følgende:

(10): Sætning 6.17: $(\mathbb{R},\mathbb{B},m)$, $y \in I =]0;\infty[$ åbent. $u:\ \mathbb{R}\times]0;\infty[\to\mathbb{R}$.
u_y er kontinuert og målelig jfr. antagelse c.: $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,y)|\ dx \leq k \in \mathbb{R}_+, y>0$, dvs. $u_y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.
u^x er kontinuert og differentiabel jfr. antagelse d. for $y>0$, dvs. for hele I, og jfr. antagelse b. har $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ en integrabel majorant.

(11): Sætning 6.17: Samme mål rum og interval. $\frac{\partial u}{\partial y}:\ \mathbb{R}\times]0;\infty[\to\mathbb{R}$.
$\frac{\partial u}{\partial y}_y$ er kontinuert og målelig jfr. antagelse b.: $\frac{\partial u}{\partial y}$ har en integrabel majorant.
$\frac{\partial u}{\partial y}_x$ er kontinuert og differentiabel jfr. antagelse d. for $y>0$, dvs. for hele I, og jfr antagelse b. har $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en integrabel majorant.

(14): Sætning 8.6 ii) (to gange): Af antagelserne har vi, at $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ og $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|$ har integrable majoranter og derfor begge er $\mathcal{L}_1$-funktioner. Desuden ved vi, at $u(x,y)\in C^2$, dvs. $u(x,y)\in C^1$ og $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\in C^1$.

4.3

a) Vi ved, at den generelle løsning til $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \xi^2 V$ er givet ved $V(\xi,y) = c_1e^{\xi y} + c_2e^{-\xi y}$. I vores tilfælde er konstanterne afhængige af ξ, så $c_1 = g_1(\xi)$ og $c_2 = g_2(\xi)$, og den generelle løsning bliver da på formen

$$V(\xi,y) = g_1(\xi)e^{\xi y} + g_2(\xi)e^{-\xi y}.$$

b) Vi ved, at

$$V(\xi,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}u(x,y)\ dx = g_1(\xi)e^{\xi y} + g_2(\xi)e^{-\xi y},$$

og at

$$V(\xi,0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}f(x)\ dx=\widehat{f}(\xi)=g_1(\xi)e^{\xi\cdot 0}+g_2(\xi)e^{-\xi\cdot 0},$$

hvilket altså vil sige, at

$$\widehat{f}(\xi)=g_1(\xi)+g_2(\xi).$$

Se nu på $V(\xi,y)=g_1(\xi)e^{\xi y}+g_2(\xi)e^{-\xi y}$, $\xi\in\mathbb{R}$. Da vi ved fra antagelse c., at $V(\xi,y)$ har en integrabel majorant, er V specielt begrænset, så for $y\to\infty$ må $g_2(\xi)=0$ for $\xi<0$, og $g_1(\xi)=0$ for $\xi\geq 0$. Vi ved også, at $\widehat{f}(\xi)=g_1(\xi)+g_2(\xi)$, og derfor er

$$V(\xi,y)=\begin{cases}\widehat{f}(\xi)e^{\xi y} & ,\quad \xi<0\\ \widehat{f}(\xi)e^{-\xi y} & ,\quad \xi\geq 0\end{cases}.$$

Men dette er fuldstændig ækvivalent med at sige, at

$$V(\xi,y)=\widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

4.4

Vi ønsker at finde f,g, så $V=\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g=\widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}$. Vi anvender resultaterne fra 3.2 og 3.3 og ser på

$$k(x)=\frac{\pi^{-1}}{1+x^2},$$

der har $\mathcal{F}(k(x))(\xi)=e^{-|\xi|}$. Vi bruger nu resultatet fra 3.3 med $a=\frac{1}{y}$, $y>0$ og får så, at $\mathcal{F}\left(k\left(\frac{x}{y}\right)\right)(\xi)=ye^{-|\xi|}$. Lad nu

$$g(x)=\frac{y^{-1}\pi^{-1}}{1+(y^{-1}x)^2}\ ,\ y>0.$$

Vi kan så bruge 8.18 i Fourier-noterne:

$$V(\xi,y)=\widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}=\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g=\mathcal{F}\left(u(x,0)*\frac{y^{-1}\pi^{-1}}{1+(y^{-1}x)^2}\right).$$

Vi bemærker nu, at $g(x)\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$, da vi nemt kan finde en integrabel majorant for $g(x)$, ligegyldigt hvor mange gange vi integrerer. F.eks. kunne $\frac{1}{x^p}$, $p>1$ være en mulighed, altså $\int_1^\infty\frac{1}{x^p}\ dx$. Men så giver Bemærkning 8.15 i Fourier-noterne os, at $f*g$ er defineret for alle x, og at $f*g\in C_b(\mathbb{R})$. Alt i alt har vi så forudsætningerne for Fouriers inversionssætning opfyldt, og vi får så, at

$$u=\mathcal{F}^{-1}(V)=\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f*g)\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left(u(x,0)*\frac{y^{-1}\pi^{-1}}{1+(y^{-1}x)^2}\right)\right).$$

4.5

Lad først

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \mathcal{F}(f(x))(\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

Da er

$$V(\xi,y) = \mathcal{F}(f*g)(\xi) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g = \pi e^{-|\xi|}e^{-|\xi|y}.$$

Men så får vi nemt, at

$$\begin{aligned}
u &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\pi e^{-(|\xi|+|\xi|y)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x-(|\xi|+|\xi|y)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{i\xi x+\xi+\xi y}\,d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{i\xi x-\xi-\xi y}\,d\xi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\xi(ix+1+y)}\,d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-\xi(-ix+1+y)}\,d\xi\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{1}{ix+1+y}e^{\xi(ix+1+y)}\right]_{-n}^{0} + \left[\frac{-1}{-ix+1+y}e^{-\xi(-ix+1+y)}\right]_{0}^{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ix+1+y} - 0 + 0 + \frac{1}{-ix+1+y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+y}{1+2y+y^2+x^2} + \frac{1+y}{1+2y+y^2+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2+2y}{(1+y)^2+x^2}\right) \\
&= \frac{1+y}{(1+y)^2+x^2},
\end{aligned}$$

som er vores eksplicitte udtryk for u, når $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$.