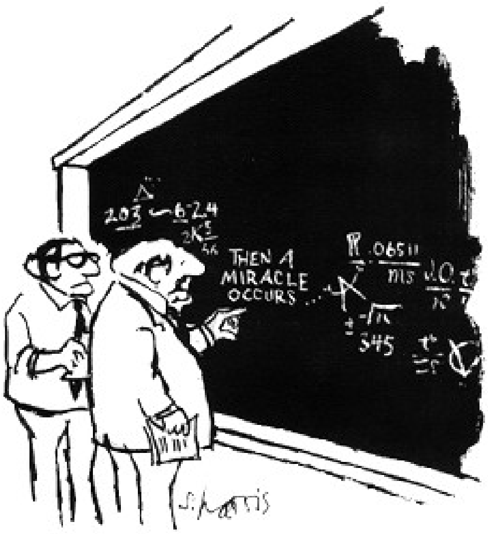
Matematisk Metode
Notesamling

Anders “Bongo” Bjerg Pedersen
Stud.Scient, Matematisk Institut, KU

21. november 2005



"I think you should be more explicit here in step two."

Bemærkninger til noterne:
Hosliggende noter er fra faget Matematisk Metode, afholdt i blok 2 i efteråret 2004 til foråret 2005. Forelæsningerne er afholdt af Ian Kiming (kiming@math.ku.dk) og er baseret på Carol Schumacher: 'Chapter Zero'[1] (CZ) og forelæserens egne noter. For uddybende eksempler henvises til CZ.
Eventuelle rettelser/kommentarer til denne notesamling kan mailes til mig på Anders.P@math.ku.dk.

[1] Carol Schumacher: 'Chapter Zero - Fundamental Notions of Abstract Mathematics' - Addison-Wesley (2001)

Kapitel 1: Logik og slutninger

Definition 1. (CZ 1.2: Udsagn og prædikater)
*Et **udsagn** er en sætning, der er enten sand eller falsk men ikke flertydig.*

*En sætning med en fri variabel, der, når den erstattes med en passende værdi, bliver til et udsagn, kaldes et **prædikat**.*

Definition 2. (CZ 1.3: Kvantifikation)
*At **kvantifisere** et prædikat til et udsagn vil sige at anvende følgende to kvantorer:*

- $\forall$ *"for alle"* *kaldes* ***alkvantoren***
- $\exists$ *"der eksisterer"* *kaldes* ***eksistenskvantoren***

Hvis et udsagn indeholder mere end én fri variabel, kan vi bygge udsagn ved at kvantifisere hver enkelt variabel.

Definition 3. (CZ 1.4.1: Matematiske udsagn)
*Et udsagn på formen "Hvis A, så B", hvor A og B er udsagn, kaldes en **implikation**. A kaldes implikationens **hypotese**, og B kaldes **konklusionen**.
"Hvis A, så B" siges ofte "A **medfører** B" og skrives
$A \Longrightarrow B$.*

Definition 4. (CZ 1.6: Sammensatte udsagn)
Givet to udsagn A og B. Disse kan sammensættes på følgende måder:

- *"A og B" kaldes **konjunktionen** mellem A og B og skrives $A \wedge B$.*
- *"A eller B" (eller begge!) kaldes **disjunktionen** mellem A og B og skrives $A \vee B$.*
- *"Ikke A" kaldes **negationen** af A og skrives $\sim A$.*
- *"A hvis og kun hvis B" kaldes **ækvivalensen** mellem A og B og skrives $A \Longleftrightarrow B$.*
  "Hvis og kun hvis" forkortes ofte "hviss" på dansk eller på engelsk "iff".

Definition 5. (CZ 1.6.1: Sandhedstabeller)
*Givet to udsagn A og B. Følgende er en **sandhedstabel** for udsagnene i CZ Definition 1.4.1 og 1.6 ud fra sandhedsværdierne for de to udsagn A og B (1 er sand og 0 er falsk):*

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\sim A$	$A \Longleftrightarrow B$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*

Definition 6. (CZ 1.6.3: Modstrid og tautologi)
Et sammensat udsagn, der altid er falsk, ligegyldigt hvad sandhedsværdierne er for de simplere involverede udsagn, kaldes en ***modstrid****.*
Eksempelvis $B \wedge \sim B$.

Et sammensat udsagn, der altid er sandt, kaldes en ***tautologi****.*
Eksempelvis $(A \wedge \sim\ B) \Longleftrightarrow \sim (A \Longrightarrow B)$.
(Tjek selv eksemplerne efter ved at konstruere sandhedstabeller!).

Definition 7. (CZ 1.8: Negation af udsagn)
Et negeret udsagn er sandt, netop når det oprindelige udsagn er falsk (og omvendt). Det samme gælder for prædikater.
Kvantorer negeres ved, at $\forall$ *bliver til* $\exists$ *og omvendt.*
Eksempelvis: $\sim (\forall x \in \mathbb{R} : \ x^3 = x) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : \ x^3 \neq x$

Se desuden noterne 'Logisk huskeseddel' af Ian Kiming (hent filen: lokalt (fra samme mappe som dette dokument) eller fra nettet).

Definition 8. (CZ 1.9: Eksistenssætninger)
En sætning, der hævder eksistensen af et matematisk objekt, kaldes en ***eksistenssætning***
Eksempelvis $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^3 = x$*. For at bevise dette, ville man normalt producere en kandidat* $(x = 1)$ *og så vise, at denne kandidat opfylder sætningen.*

Definition 9. (CZ 1.10: Entydighedssætninger)
En sætning, der garanterer éntydigheden af et matematisk objekt, kaldes en ***entydighedssætning****. For at bevise en sådan sætning antages det, at der eksisterer to sådanne objekter, og det bevises, at de så må være ens.*

Definition 10. (CZ 1.11: Eksempler og modeksempler)
Et ***eksempel*** *er en kandidat til et udsagn, der gør udsagnet sandt. Er udsagnet en eksistenssætning (og* kun *i dette tilfælde!), udgør eksemplet et bevis for denne (forudsat man selvfølgelig har vist, at eksemplet opfylder udsagnet!).*
Et ***modeksempel*** *er et eksempel på en kandidat, der modbeviser en sætning. Dvs. et eksempel der viser, at et udsagn ikke gælder for den pågældende kandidat. At finde en sådan kandidat udgør et modbevis for udsagnet.*

Definition 11. (CZ 1.12: Direkte bevis)
Når en implikation vises ved at antage, at hypotesen er sand og så vise, at konklusionen også er sand, har man udført et ***direkte bevis****.*

Definition 12. (CZ 1.13: Bevis ved kontraposition)
Man kan vise, at

$$A \Longrightarrow B \equiv \sim B \Longrightarrow \sim A$$

$\sim B \Longrightarrow \sim A$ *kaldes* ***kontrapositionen*** *til* $A \Longrightarrow B$*.*

Dvs. kan man bevise "Hvis ikke B*, så ikke* A*", har man bevist "Hvis* A*, så* B*". Et sådant bevis kaldes* ***bevis ved kontraposition****.*

Definition 13. (CZ 1.14: Bevis ved modstrid)
Man kan vise, at

$$A \equiv (\sim A) \Longrightarrow (P \wedge \sim P),$$

og

$$A \Longrightarrow B \equiv (A \wedge \sim B) \Longrightarrow (P \wedge \sim P).$$

Dvs. hvis man antager, at et udsagn er falsk, og man derefter kan vise, at dette medfører en modstrid $(P \wedge \sim P)$*, har man vist, at udsagnet er sandt. Et sådant bevis kaldes et* ***bevis ved modstrid****.*

Se f.eks. beviset for Sætning 23 (CZ 8.4.5).

Kapitel 2: Mængder og mængdeoperationer

Definition 14. (CZ 2.1.2: Intervalnotation)
Lad a og b være reelle tal. Vi definerer så:

$$\begin{aligned}
[a;b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
[a;b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(a;b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
(a;b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}
\end{aligned}$$

$[a;b]$ *kaldes det* ***lukkede interval*** *fra a til b.*
$(a;b)$ *kaldes det* ***åbne interval*** *fra a til b.*
$[a;b)$ *og* $(a;b]$ *kaldes* ***halv-åbne intervaller****.*

Definition 15. (CZ 2.1.3: Den tomme mængde)
Den ***tomme mængde*** *skrives* $\emptyset$ *eller* $\{\}$*.*

Definition 16. (CZ 2.2.1: Delmængde)
Givet to mængder, A og S.

$$S \subseteq A \Leftrightarrow \forall x: \ (x \in S \Rightarrow x \in A)$$

Sætning 1. (CZ 2.2.2)
For alle mængder X gælder: (i) $\emptyset \subseteq X$ *og (ii)* $X \subseteq X$*.*

Bevis. Vi viser begge påstandene:

(i) $x \in \emptyset \Rightarrow x \in X$: Venstresiden er falsk for alle x, altså er implikationen sand!

(ii) $x \in X \Rightarrow x \in X$: Der vil altid være samme sandhedsværdi på begge sider af implikationen, derfor er den sand!

□

Definition 17. (CZ 2.2.7: Mængdelighed)
Givet to mængder, A og B. Der gælder så:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Definition 18. (CZ 2.3.1: Komplementærmængde)
Givet to mængder, S og U, hvor $S \subseteq U$*. Da defineres* ***komplemæntærmængden*** *til S:*

$$S^{\complement} := \{x \in U : \ x \notin S\}$$

som også ofte skrives $U \backslash S$ *eller* $\complement S$*.*

Definition 19. (CZ 2.3.4: Fælles- og foreningsmængde)
Givet to mængder, A og B. Da defineres:

$$\begin{array}{ll} A \cap B := \{x: \ x \in A \wedge x \in B\} & \textit{kaldes } \textbf{\textit{fællesmængden}} \textit{ mellem } A \textit{ og } B \\ A \cup B := \{x: \ x \in A \vee x \in B\} & \textit{kaldes } \textbf{\textit{foreningsmængden}} \textit{ mellem } A \textit{ og } B \end{array}$$

Definition 20. (CZ 2.3.6: Disjunkte mængder)
*Givet to mængder, A og B. Hvis $A \cap B = \emptyset$, kaldes A og B **disjunkte**.*

Definition 21. (CZ 2.3.13: Fælles- og foreningsmgd. for samlinger af mgd.:)
Lad $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ være en samling af mængder, hvor $B_\alpha \subseteq X$. Da defineres:

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \in \Lambda : x \in B_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \in \Lambda : x \in B_\alpha\}$$

Sætning 2. (CZ 2.4.2)
Lad A,B og C være mængder. Så gælder:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Bevis. Se CZ s.48. □

Sætning 3. (CZ 2.4.5)
Lad Λ være en vilkårlig indexmængde for en samling af mængder $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, og lad A være en mængde. Så gælder:

$$\begin{array}{rlcl} (i) & A \cup \left(\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \right) & = & \displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A \cup B_\alpha) \\ (ii) & A \cap \left(\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \right) & = & \displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A \cap B_\alpha) \end{array}$$

Bevis. Vi viser begge påstande:
Bevis for (i):

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (\forall \alpha \in \Lambda : \ x \in B_\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda : \ x \in A \vee x \in B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in \Lambda : \ x \in A \cup B_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A \cup B_\alpha)$$

Bevis for (ii):

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\exists \alpha \in \Lambda : \; x \in B_\alpha) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda : \; x \in A \wedge x \in B_\alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda : \; x \in A \cap B_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha)$$

□

Sætning 4. (CZ 2.4.6)
Lad Λ være en vilkårlig indexmængde for en samling af mængder $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, og lad A være en mængde. Så gælder:

$$\begin{aligned} (i) \quad A \cap \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right) &= \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (A \cap B_\alpha) \\ (ii) \quad A \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A \cup B_\alpha) \end{aligned}$$

Bevis. Kører fuldstændig analogt med beviset for 2.4.5. □

Sætning 5. (CZ 2.4.9)
Lad Λ være en vilkårlig indexmængde for en samling $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ af delmængder af en mængde U. Så gælder:

$$\begin{aligned} (i) \quad \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^{\mathcal{C}} &= \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\mathcal{C}} \\ (ii) \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^{\mathcal{C}} &= \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Bevis. Vi viser inklusionen begge veje:

Bevis for (i):

$\subseteq$: Antag, at $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right)^{\mathcal{C}}$. Dvs. x ligger ikke i A_α for et $\alpha \in \Lambda$, altså ligger x i $A_\alpha^{\mathcal{C}}$ for alle $\alpha \in \Lambda$, som er det samme som $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\mathcal{C}}$.

$\supseteq$: Antag nu, at $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\mathcal{C}}$, dvs. $x \in U \setminus \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, dvs. x ikke tilhører $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, så må $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha^{\mathcal{C}}$

Bevis for (ii): Kører analogt... □

Definition 22. (CZ 2.5.1: Potensmængden)
*Hvis A er en mængde, så kaldes mængden af alle delmængder af A for A's **potensmængde** og skrives $\mathcal{P}(A)$.*

Kapitel 3: Induktion

Axiom 1. (CZ s.58: Induktionsaxiomet)
Lad S være en delmængde af $\mathbb{N}$, der opfylder:

- $1 \in S$ *og*
- *hvis* $k \in S$*, så er* $k+1 \in S$.

Så er $S = \mathbb{N}$.

Sætning 6. (CZ 3.1.2: Det matematiske induktionsprincip)
Lad $P_1, P_2, P_3, \ldots$ være en række af udsagn, et for hvert naturligt tal. Antag, at:

- P_1 *er sand, og*
- *hvis* P_k *er sand, så er* P_{k+1} *også sand.*

Så er P_n *sand for alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Se CZ s.60. □

Sætning 7. (CZ 3.2.2, alternativ version med i^2)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Bevis. Ved induktion efter n.

$\underline{n = 1:}$ $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, altså P_1 sand!

$\underline{n = n_0:}$ Antag P_{n_0} sand (induktionsantagelsen), dvs.

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2 = \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} \quad , \quad n_0 \in \mathbb{N}$$

Vi skal vise, at $P_{n_0} \Rightarrow P_{n_0+1}$. Vi ser på:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_0+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n_0} i^2\right) + (n_0+1)^2 \\
&= \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} + (n_0+1)^2 \\
&= (n_0+1) \cdot \left(\frac{2n_0^2 + n_0}{6} + (n_0+1)\right)
\end{aligned}$$

Dette skal ifølge sætningen være lig

$$\frac{(n_0+1) \cdot ((n_0+1)+1) \cdot (2(n_0+1)+1)}{6}$$

Vi ser derfor på:

$$
\begin{aligned}
\frac{((n_0+1)+1)\cdot(2(n_0+1)+1)}{6} &= \frac{(n_0+1)(2n_0+3)+2n_0+3}{6} \\
&= \frac{2n_0^2+3n_0+2n_0+3+2n_0+3}{6} \\
&= \frac{2n_0^2+n_0+(6n_0+6)}{6} \\
&= \frac{2n_0^2+n_0}{6}+(n_0+1)
\end{aligned}
$$

Som er lig det ønskede, og derfor er P_{n_0+1} sand. Derfor er P_n ifølge induktionssætningen sand for alle $n \in \mathbb{N}$. □

Sætning 8. (CZ 3.3.1: Princippet om fuldstændig induktion)
Lad (P_n) være en række af udsagn. Antag, at:

- *P_1 er sand. og*
- *hvis P_j er sand for alle $j \leq k$, så er P_{k+1} også sand.*

Så er P_n sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

Med andre ord: For ethvert $k \in \mathbb{N}$ gælder: Af $P_1, \ldots, P_k$ kan P_{k+1} sluttes.

Definition 23. *Betragt polynomiet*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$$

$\deg f = n =$graden af f.
*f kaldes **reducibelt**, hvis der findes polynomier $g(x), h(x)$, så:*

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \text{og} \quad 1 \leq \deg g < \deg f$$

*f kaldes **irreducibelt**, hvis f ikke er reducibelt.*

Sætning 9. (CZ 3.3.3)
Ethvert polynomium med rationale koefficienter kan skrives som produkt af irreducible polynomier.

Bevis. Lad P_n være udsagnet i sætningen. Vi viser sætningen ved fuldstændig induktion efter n:

$\underline{n = 1:}$ $a_1x^1 + a_0$: klart irreducibelt, altså P_1 sand!

$\underline{n > 1:}$ Antag $P_1, \ldots P_k$ sand (induktionsantagelsen), vise at P_{k+1} sand. Lad f være et polynomium af grad $k+1$. Vi deler op i to tilfælde:

1) f irreducibelt: OK!

2) f reducibelt: $\exists g, h: \; f = g \cdot h$
   Da har vi, at $1 \leq$deg$g <$deg$f$. Derfor også $1 \leq$deg$h <$deg$f$.
   Da ligger deg$g$ og deg$h$ i $\{1, \ldots k\}$, og derfor kan g og h skrives som produkter af irreducible polynomier (jævnfør induktionsantagelsen) og er derfor reducible.
   Så er $f = g \cdot h$ det også.

Vi har nu vist, at P_{k+1} er sand, når $P_1, \ldots P_k$ er sand. Derfor er P_n sand for alle $n \in \mathbb{N}$. □

Definition 24. *Et naturligt tal kaldes* ***sammensat****, hvis der findes $a, b \in \mathbb{N}$, så $n = a \cdot b$, og $1 < a < n$ ('n har en ægte divisor a'). Et naturligt tal $n > 1$ kaldes et* ***primtal****, hvis n ikke er sammensat.*

Sætning 10. *Et naturligt tal $n > 1$ er et produkt af primtal.*

Bevis. Vi viser sætningen ved fuldstændig induktion efter n, idet vi først omskriver udsagnet en smule: *"Ethvert naturligt tal n er enten lig 1 eller er et produkt af primtal"*. Lad dette udsagn være P_n.

$\underline{n = 1}:$ Sandt, da 1=1.

$\underline{n > 1}:$ Lad $n \in \mathbb{N}$. Vi skal vise, at af $P_1, \ldots, P_n$ kan P_{n+1} sluttes.
Antag $P_1, \ldots, P_n$ sande. Vi skal vise P_{n+1}, dvs. at $n+1$ er et produkt af primtal. Vi deler op i to tilfælde:

1) $(n+1)$ primtal: OK!

2) $(n+1)$ sammensat: dvs. der findes $a, b \in \mathbb{N}$, så $n+1 = a \cdot b$ og $1 < a < n+1$, dvs. også $1 < b < n+1$.
   Da $P_1, \ldots, P_n$ alle er sande jfr. induktionsantagelsen, fås P_a, P_b begge sande.
   Da $a > 1, b > 1$ fås: a, b begge produkter af primtal, og derfor kan $n = a \cdot b$ skrives som produkt af primtal.

□

Se desuden noterne 'Rekursion' af Ian Kiming (hent filen: lokalt (fra samme mappe som denne) eller fra nettet).

Kapitel 4: Relationer

Definition 25. (CZ 4.1.1+4.1.4: Relationer)
Lad A og B være mængder. En ***relation*** *på A og B er en delmængde af $A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \text{ og } b \in B\}$. En delmængde af $A \times A$ kaldes en relation på A.*
Vi skriver en relation som $\sim$, og vi skriver $(A, \sim)$ for relationen $\sim$ på A.

Definition 26. (CZ 4.1.8)
Lad $(A, \sim)$ være givet, og lad $x, y, z \in A$.

- *$\sim$ siges at være* ***refleksiv****, hvis der for alle x gælder:*
  $x \sim x$
- *$\sim$ siges at være* ***symmetrisk****, hvis der for alle x, y gælder:*
  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- *$\sim$ siges at være* ***antisymmetrisk****, hvis der for alle x, y gælder:*
  $x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$
- *$\sim$ siges at være* ***transitiv****, hvis der for alle x, y, z gælder:*
  $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim y$

Definition 27. (CZ 4.2.1: Ordensrelationer)
En relation $\leq$ på en mængde A kaldes en ***partiel ordning****, hvis den er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.*
En mængde sammen med en partiel ordning kaldes en partielt ordnet mængde, og vi skriver normalt $(A, \leq)$.

Definition 28. (CZ 4.2.3: Totale ordninger)
En partielt ordnet mængde A med en partiel ordning $\leq$ kaldes ***totalt ordnet****, hvis*

$$\forall a, b \in A : \ a \leq b \vee b \leq a$$

I dette tilfælde kaldes $\leq$ en ***total ordning****.*

Definition 29. (CZ 4.2.5: Tredelingsloven)
Lad A være en partielt ordnet mængde under $\leq$. A siges at overholde ***tredelingsloven****, hvis præcist ét af følgende udsagn gælder:*

$$\textbf{i. } a < b \qquad \textbf{ii. } a = b \qquad \textbf{iii. } a > b$$

Her betyder $<$ følgende: $a < b \Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \neq b)$.

Sætning 11. (CZ 4.2.6: Totale ordninger og tredelingsloven)
En partielt ordnet mængde A er totalt ordnet, hvis og kun hvis den overholder tredelingsloven.

Bevis. Vi viser implikationen begge veje:

$\Leftarrow$: i) Antag $a < b$: Da har vi: $a < b \Rightarrow (a \leq b \vee b \leq a)$; SANDT!
ii) Antag $a = b$: Da har vi: $a = b \Rightarrow (a \leq b \vee b \leq a)$; SANDT!
iii) Antag $b < a$: Da har vi: $b < a \Rightarrow (a \leq b \vee b \leq a)$; SANDT!

$\Rightarrow$: Antag $(a \leq b \vee b \leq a)$. Vi har da:

$(a \leq b \vee b \leq a) \Leftrightarrow (a < b \vee a = b) \vee (b < a \vee b = a) \Leftrightarrow a < b \vee a = b \vee b < a$

som jo er tredelingsloven.

$\square$

Definition 30. (CZ 4.2.19: Grænser og infimum/supremum)
Lad A være en partielt ordnet mængde, og lad $K \subseteq A$, $K \neq \emptyset$, $x \in A$. Da definerer vi:

- *x er en* ***øvre grænse*** *for K, hvis $\forall y \in K: \ x \geq y$.*
  K kaldes så ***opadtil begrænset****.*
- *x er en* ***nedre grænse*** *for K, hvis $\forall y \in K: \ x \leq y$.*
  K kaldes så ***nedadtil begrænset****.*
- *x er en* ***mindste øvre grænse*** *for K, hvis der gælder, at x er en øvre grænse for K, og for alle øvre grænser $u: \ x \leq u$.*
  x kaldes så ***supremum*** *for K og skrives* $\sup K$.
- *x er en* ***største nedre grænse*** *for K, hvis der gælder, at x er en nedre grænse for K, og for alle nedre grænser $l: \ x \geq l$.*
  x kaldes så ***infimum*** *for K og skrives* $\inf K$.

Sætning 12. (CZ 4.2.22: Unikt supremum)
Lad A være en partielt ordnet mængde, og lad K være en ikke-tom delmængde af A. Hvis K har en mindste øvre grænse, er den unik.

Bevis. Lad A være en partielt ordnet mængde, og lad K være en ikke-tom delmængde af A. Antag nu, at x_1 og x_2 er mindste øvre elementer for K. Da gælder:

$$\forall y \in K: \ x_1 \geq y \wedge x_2 \geq y$$

Givet en vilkårlig øvre grænse u for K, er $x_1 \leq u$ og $x_2 \leq u$.
Da er $x_1 < u$ eller $x_1 = u$, og $x_2 < u$ eller $x_2 = u$.
Da $x_1 < u$ og $x_2 < u$ ikke kan lade sig gøre, da de er mindste øvre grænser, er $x_1 = x_2$. $\square$

Definition 31. (CZ 4.2.23: Supremums- og infimumsegenskab)
En partielt ordnet mængde, i hvilken enhver ikke-tom opadtil begrænset mængde har en mindste øvre grænse, siges at have ***supremumsegenskaben****.*
En partielt ordnet mængde, i hvilken enhver ikke-tom nedadtil begrænset mængde har en største nedre grænse, siges at have ***infimumsegenskaben****.*

Lemma 1. (CZ 4.2.25)
Lad A være en partielt ordnet mængde og lad $K \subseteq A$. Definer:

$$L_k = \{x \in A : \; x \textit{ er en nedre grænse for } K\}$$

Antag, at $x = \inf K$.
Det samme gælder analogt for $U_k = \{x \in A : \; x \textit{ er en øvre grænse for } K\}$, hvor $x = \inf U_k = \sup K$.

Bevis. L_k er opadtil begrænset, da $\forall k \in K$: 'k er øvre grænse for L_k'.

$$\begin{bmatrix} \text{Bevis: } l \in L_k : \text{da er } l \text{ nedre grænse for } K. \\ \text{Dvs. } l \text{ og } k \text{ vilkårlige} \Rightarrow k \text{ øvre grænse for } L_k \end{bmatrix}$$

Da $x = \sup L_k$ har vi, at $x \leq k$. Dvs. x er en nedre grænse for K, dvs. $x \in L_k$.
Lad $z \in L_k$ Da $x = \sup L_k$, har vi $z \leq x$. Derfor er $x = \inf K$.
Beviset for U_k kører analogt. □

Sætning 13. (CZ 4.2.26)
Lad A være en partielt ordnet mængde. Da gælder:

$$A \textit{ har supremumsegenskaben} \Leftrightarrow A \textit{ har infimumsegenskaben}$$

Bevis. Vi viser implikationen begge veje:

$\Rightarrow$: Antag, at $(A, \leq)$ har supremumsegenskab. Lad $K \subseteq A$ være en ikke-tom nedadtil begrænset mængde. Da findes $L_k \neq \emptyset$.
L_k er opadtil begrænset jfr. CZ 4.2.25. Da $L_k \subseteq A$, findes $\sup L_k$ og dermed også $\inf K$ (ifølge CZ 4.2.25).

$\Leftarrow$: Antag, at $(A, \leq)$ har infimumsegenskab. Lad $K \subseteq A$ være en ikke-tom opadtil begrænset mængde. Da findes $U_k \neq \emptyset$.
U_k er nedadtil begrænset jfr. CZ 4.2.25. Da $U_k \subseteq A$, findes $\inf U_k$ og dermed også $\sup K$ (ifølge CZ 4.2.25).

□

Definition 32. (CZ 4.3.1)
Lad S være en mængde og lad Ω være en samling af delmængder af S. Elementerne i Ω siges at være ***parvist disjunkte****, hvis for alle elementer $A, B \in \Omega$, enten $A = B$ eller $A \cap B = \emptyset$.*

Definition 33. (CZ 4.3.3: Partioner)
En samling af ikke-tomme delmængder Ω af en mængde S siges at være en

partition *på S, hvis der gælder, at elementerne i Ω er parvist disjunkte, og deres foreningsmængde er hele S. Der gælder med andre ord:*

i. *givet $A, B \in \Omega$, enten $A = B$ eller $A \cap B = \emptyset$, og*

ii. $\displaystyle\bigcup_{A \in \Omega} A = S$

Definition 34. (CZ 4.3.6)
Lad A være en mængde og $\Omega \subseteq \mathcal{P}(A)$. Hvis a_1 og a_2 er elementer i A, siger vi, at a_1 relaterer til a_2, hvis der findes et element $R \in \Omega$, der indeholder både a_1 og a_2.
Denne relation, $\sim_\Omega$, kaldes ***relationen på*** A ***associeret med*** Ω.

Definition 35. (CZ 4.3.9)
Lad A være en mængde, og lad $\sim$ være en relation på A. Ethvert $a \in A$ giver os en delmængde af A:

$$T_a = \{x \in A : \ a \sim x\}$$

Alle disse delmængder udgør en samling af delmængder af A, $\Omega_\sim$:

$$\Omega_\sim = \{T_a : \ a \in A\}$$

$\Omega_\sim$ *kaldes* ***samlingen af delmængder af*** A ***associeret med*** $\sim$.

Korollar 1. (CZ 4.3.17: Ækvivalensrelationer)
Lad A være en mængde, og lad Ω være en partition på S. Da er $\sim_\Omega$ refleksiv, symmetrisk og transitiv. $\sim_\Omega$ kaldes så en ***ækvivalensrelation***.

Bevis. Vi viser refleksivitet, symmetri og transitivitet:

- refleksiv: Lad $s \in A$. Da har vi, at
  $s \in \displaystyle\bigcup_{B \in \Omega} B \Rightarrow \exists B \in \Omega : \ (s \in B \wedge s \in B)$.
  Da har vi, at $s \sim_\Omega s$.

- symmetrisk: Lad $a, b \in A$. $a \sim_\Omega b \Rightarrow \exists B \in \Omega : \ (a \in B \wedge b \in B)$
  $\Rightarrow \exists B \in \Omega : \ (b \in B \wedge a \in B) \Rightarrow b \sim_\Omega a$.

- transitiv: Givet $a, b, c \in A$, hvor
  $a \sim_\Omega b$, hvilket vil sige: $\exists B \in \Omega : \ (a \in B \wedge b \in B)$ og
  $b \sim_\Omega c$, hvilket vil sige: $\exists C \in \Omega : \ (b \in C \wedge c \in C)$
  Da har vi, at $b \in B \wedge b \in C \Rightarrow b \in B \cap C \Rightarrow B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow B = C$.
  Dvs. $a \in B$, $b \in B$, $c \in C \Rightarrow a \sim_\Omega c$.

$\square$

Definition 36. (CZ 4.3.18: Ækvivalensrelationer)
*Er relation på en mængde A, der er refleksiv, symmetrisk og transitiv, kaldes en **ækvivalensrelation**.*

Lemma 2. (CZ 4.3.20)
Lad der være givet A med ækvivalensrelationen $\sim$ og $a, b \in A$. Der gælder så:

$$T_a = T_b \Leftrightarrow a \sim b$$

Bevis. Vi viser implikationen begge veje:

$\Rightarrow$: Antag $T_a = T_b$. $b \in T_b = T_a \Rightarrow b \in T_a \Rightarrow a \sim b$

$\Leftarrow$:
- $T_a \subseteq T_b$: Antag $a \sim b$. Lad $x \in T_a$.
  $a \sim x \Rightarrow x \in a$. $x \sim a \wedge a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in T_b \Rightarrow T_a \subseteq T_b$
- $T_b \subseteq T_a$: Antag $a \sim b$. Lad $x \in T_b$.
  $a \sim b \wedge b \sim x \Rightarrow a \sim x \Rightarrow x \in T_a \Rightarrow T_b \subseteq T_a$

□

Sætning 14. (CZ 4.3.21: Ækvivalensrelationer og partitioner)
Givet S med ækvivalensrelationen $\sim$. Da udgør $\Omega_\sim = \{T_s\}_{s \in S}$ en partition på S, dvs.:

i) $\bigcup_{x \in S} T_x = S$

ii) $\forall x, y \in S : (T_x = T_y \vee T_x \cap T_y = \emptyset)$

Bevis. Vi viser begge sætningens påstande:

i) $\subseteq$: Klart, at $\bigcup\limits_{x \in S} T_x \subseteq S$. $\supseteq$: $y \in S$. $y \sim y \Rightarrow y \in T_y \Rightarrow y \in \bigcup_{x \in S} T_x$

ii) Antag $T_x \cap T_y \neq \emptyset$. $\exists z \in S : (z \in T_x \vee z \in T_y)$, dvs. $x \sim z \wedge y \sim z$. Dvs. vi har: $x \sim z \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim y$. Derfor er $T_x = T_y$ ifølge Lemma.

□

Definition 37. (CZ 4.3.22: Ækvivalensklasser)
*Lad ækvivalensrelationen $\sim$ på S være givet. Da kaldes T_x, $x \in S$ for **ækvivalensklassen** for x under $\sim$.*
$\Omega_\sim = \{T_x\}_{x \in S}$ kaldes så mængden af ækvivalensklasser for $\sim$, eller bare ækvivalensklasserne for $\sim$.

Et par simple eksempler på regning med supremum og ækvivalensrelationer kan ses i pdf-filen 'eksempler1.pdf' (hent filen: lokalt (fra samme mappe som dette dokument) eller fra nettet).

Kapitel 5: Funktioner

Definition 38. (CZ 5.1.1)
*Lad A og B være to ikke-tomme mængder. En **funktion** $f: A \to B$ er en relation mellem A og B hvorom der gælder:*

$$\begin{array}{rl} (i) & \forall a \in A \exists b \in B: \ (a,b) \in f \\ (ii) & (a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c \end{array}$$

Hvis $a \in A$, skrives $b \in B$, for hvilket $(a,b) \in f$, som $b = f(a)$.

Definition 39. (CZ 5.1.8)
En funktion, $f: A \to B$, siges at være:

- *Injektiv, hvis der til ethvert $b \in B$ findes højest ét $a \in A$, for hvilke $b = f(a)$*
- *Surjektiv, hvis der til ethvert $b \in B$ findes mindst ét $a \in A$, for hvilke $b = f(a)$*
- *Bijektiv, hvis den er både injektiv og surjektiv.*

Definition 40. (CZ 5.2.1)
*Lad $f: A \to B$ og $g: B \to C$ være funktioner. Så kan en ny funktion $g \circ f: A \to C$ defineres ved $g \circ f(a) = g(f(a))$ og kaldes **sammensætningen** af g og f.*

Definition 41. (CZ 5.2.8 (+5.2.7))
Lad $f: A \to B$ være en bijektiv funktion. Da defineres funktionen:

$$f^{-1} := \{(f(a), a): \ a \in A\}$$

Definition 42. (CZ 5.3.1)
Lad $f: A \to B$ være en funktion, og lad $S \subseteq B$.
*Mængden $f^{-1}(S) = \{a \in A: \ f(a) \in S\} \subseteq A$ kaldes **urbilledet** eller **originalmængden** til S ved f.*

Sætning 15. (CZ 5.3.6)
Lad $f: A \to B$ være en bijektiv funktion, og lad $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ være en samling af delmængder af B, og lad $S \subseteq B$. Så gælder:

$$\begin{array}{rrcl} (i) & f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha\right) & = & \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \left(f^{-1}(S_\alpha)\right) \\ (ii) & f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha\right) & = & \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \left(f^{-1}(S_\alpha)\right) \\ (iii) & f^{-1}\left(S^{\complement}\right) & = & \left(f^{-1}(S)\right)^{\complement} \end{array}$$

Bevis. Vi viser (i) og (iii):
Bevis for (i):

$\subseteq$: Vi regner:

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha\right) \Rightarrow f(x) \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \Rightarrow \exists\alpha \in \Lambda : \; f(x) \in S_\alpha$$
$$\Rightarrow \exists\alpha \in \Lambda : x \in f^{-1}(S_\alpha) \Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \left(f^{-1}(S_\alpha)\right)$$

$\supseteq$: Kører analogt, bare den modsatte vej (dvs. der gælder bi-implikationer).

Bevis for (ii): Kører analogt med beviset for (i) (husk at vende $\exists$ til $\forall$).

Bevis for (iii):

$\subseteq$: $x \in f^{-1}\left(S^{\complement}\right) \Rightarrow f(x) \in S^{\complement} \Rightarrow f(x) \notin S \Rightarrow x \in \left(f^{-1}(S)\right)^{\complement}$

$\supseteq$: Kører analogt, bare den modsatte vej (dvs. der gælder bi-implikationer)

□

Definition 43. (CZ 5.3.7)
Lad $f: \; A \to B$ være givet. Lad $T \subseteq A$. Mængden

$$f(T) = \{b \in B : \; \exists t \in T : \; f(t) = b\} = \{f(t) : \; t \in T\}$$

*kaldes **billedet** af T ved f.*

Sætning 16. (CZ 5.3.11)
Lad $f: \; A \to B$ være givet, og lad $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ være en samling af delmængder af A. Så gælder:

$$(i) \quad f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (f(T_\alpha))$$
$$(ii) \quad f\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (f(T_\alpha))$$

Vi nøjes med en del af beviset:

Bevis for (ii). Vi viser inklusionen begge veje:

$\subseteq$: Lad $x \in f\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha\right)$. Vi skal vise, at $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(f(T_\alpha))$.

$$x \in f\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha\right) \text{ vil sige, at } \exists a \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha : \ f(a) = x$$

Dvs.: $x = f(a)$, $a \in T_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$

$$\exists a \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha : \ f(a) = x \text{ vil sige, at } \forall \alpha \in \Lambda : \ a \in T_\alpha$$

Dvs.: $x \in f(T_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda$.

Dvs.: $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(f(T_\alpha))$.

$\supseteq$: Kører analogt...

Beviset for (i) kører analogt med beviset for (ii) (med $\exists$ og $\forall$ byttet om). $\square$

Et par simple eksempler på regning med afbildninger kan ses i pdf-filen 'eksempler2.pdf' (hent filen: lokalt (fra samme mappe som dette dokument) eller fra nettet).

Kapitel 8: Konstruktion af de reelle tal

Axiom 2. (CZ s.180: Axiom I: Legemsaxiomerne)
Lad $\mathbb{R}$ være en mængde med de binære operatorer + og $\cdot$, og lad $x, y, z \in \mathbb{R}$. Vi antager så:

- *+/$\cdot$ kommutative:* $x + y = y + x$ *og* $x \cdot y = y \cdot x$.
- *+/$\cdot$ associative:* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *og* $(xy)z = x(yz)$.
- *Additiv identitet: Der findes et element 0, så* $x + 0 = x$.
- *Multiplikativ identitet: Der findes et element 1, så* $1 \cdot x = x$.
- *Additiv invers: Der findes et element* $(-x)$*, så* $x + (-x) = 0$.
- *Multiplikativ invers: Der findes et element* $\frac{1}{x}$*, så* $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
- *Multiplikation distribuerer over addition:* $x(y + z) = xy + xz$.

*Enhver mængde med ovenstående egenskaber kaldes et **legeme**.*

Definition 44. (CZ 8.2.1: Subtraktion og division)
Lad $x, y \in \mathbb{R}$. Vi definerer - og $\div$ som følger:

$$x - y = x + (-y) \quad og \quad x \div y = x \cdot \frac{1}{y}$$

Sætning 17. (CZ 8.2.2)
Lad $x \in \mathbb{R}$. Der findes præcis ét $y \in \mathbb{R}$, så $x + y = 0$.

Bevis. Vi skal altså vise eksistens og entydighed af et sådant element:

- Eksistens: $y = -x$ tilfredsstiller $x + y = 0$.
- Entydighed: Antag $y \in \mathbb{R}$ med $x + y = 0$.

  $y = y + 0 = 0 + y = (x + (-x)) + y = (-x) + (x + y) = (-x) + 0 = -x.$

□

Sætning 18. (CZ 8.2.4)

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ x \cdot 0 = 0$$

Bevis. Lad $y = x \cdot 0$. Vi har, at $0 + 0 = 0$. Dvs.

$$y = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = (x \cdot 0) + (x \cdot 0) = y + y,$$

altså $y = y + y$. Vi ved, at

$$0 = y + (-y) = (y + y) + (-y) = y + (y + (-y)) = y + 0 = y,$$

altså $y = 0$. □

Sætning 19. (CZ 8.2.5)

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; -x = (-1) \cdot x$$

Bevis. Vi ved, at $1 + (-1) = 0$, og at $x + (-x) = 0$, altså

$$x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 0 = 0 = x \cdot 1 + x \cdot (-1) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x.$$

Af 8.2.4 har vi, at der netop findes ét $y \in \mathbb{R}$, så $x + y = 0$, nemlig $y = -x$. Derfor er $(-x) = (-1) \cdot x$. $\square$

Axiom 3. (CZ s.183: Axiom II: Ordensaxiomet)
Der findes en delmængde $\mathbb{R}_+$ af $\mathbb{R}$, så $\mathbb{R}_+$ er lukket mht. $+$ og $\cdot$, dvs.:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \; x + y \in \mathbb{R}_+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}_+$$

Desuden gælder for alle $a \in \mathbb{R}$ kun ét af følgende:

$$i) \; a \in \mathbb{R}_+ \qquad ii) \; a = 0 \qquad iii) \; -a \in \mathbb{R}_+.$$

Vi kalder $\mathbb{R}_+$ for de ***positive tal*** *og komplementet til $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ for de* ***negative tal*** *og kalder mængden af disse for $\mathbb{R}_-$.*

Lemma 3.

$$(i) \quad (-1) \cdot (-1) = 1 \qquad (ii) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \; (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

Bevis. Vi viser begge lemmaets påstande:

(i): Vi ved fra 8.2.5, at $-(-1) = (-1) \cdot (-1)$.

$$\underbrace{\overbrace{(-1) + (-(-1))}^{8.2.2} = 0 = (-(-1)) + (-1) \quad ; \quad \overbrace{1 + (-1) = 0}^{\text{add. inv.}}}$$

$$\Downarrow 8.2.2$$

$$1 = \underbrace{-(-1) = (-1) \cdot (-1)}_{\text{add. inv. } -x = (-1)\cdot x}$$

(ii): Antag:

$$\begin{array}{rcl} (-x) \cdot (-y) & \overbrace{=}^{8.2.5} & ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot y) \\ (komm.mult.) & = & (x \cdot (-1)) \cdot ((-1) \cdot y) \\ (ass.mult.) & = & x \cdot ((-1) \cdot (-1) \cdot y) \\ (i) & = & x \cdot (1 \cdot y) \\ (mult.ident.) & = & x \cdot y \end{array}$$

$\square$

Definition 45. (CZ 8.3.4)
Vi definerer relationen $\leq$ på $\mathbb{R}$ som følger:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \Leftrightarrow x \leq y$$

Sætning 20. (CZ 8.3.5)

$$(\mathbb{R}, \leq) \text{ er totalt ordnet.}$$

Bevis. Vi skal vise refleksivitet, antisymmetri, transitivitet og den totale ordning:

- refleksiv:
  Vise, at $\forall x \in \mathbb{R}: \; x - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
  $x - x = x + (-x) = 0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

- antisymmetrisk:
  Vise, at $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$.
  Antag: $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ og $x - y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
  Antag nu $y - x \in \mathbb{R}_+$, da har vi $-(y - x) \notin \mathbb{R}_+$ (Axiom II)
  Men $-(y - x) = x - y$ $((x - y) + (y - x) = x + (-y) + y + (-x) = 0)$
  Altså: Hvis $y - x \in \mathbb{R}_+$, så $x - y \notin \mathbb{R}_+$.
  Antag nu ovenstående. Da $x - y \notin \mathbb{R}_+$, følger $x - y = 0$.
  Dvs. $x + (-y) = 0$, dvs. $x + (-y) + y = 0 + y = y$. $x = x + 0 = y$
  Altså $y - x = 0$ MODSTRID!, da vi antog $y - x \in \mathbb{R}_+$!
  Da $y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, fås $y - x = 0$, altså $y = x$.

- transitiv:

  $$\left.\begin{array}{r} x \leq y \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ y \leq z \Rightarrow z - y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow (y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

  (da $\mathbb{R}_+$ lukket mht. $+/\cdot$)
  Men da $(y - x) + (z - y) = x - z$, har vi, at $x - z \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Dvs. $x \leq z$.

- total:
  Lad x, y være vilkårlige. Vi skal vise: $x \leq y$ eller $y \leq x$. Vi har fra Axiom II:

$x - y \in \mathbb{R}_+$	Da haves: $y \leq x$
$x - y = 0$	Da haves: $y \leq x$, da $x - y = 0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
$-(x - y) \in \mathbb{R}_+$	Hvis $-(x - y) \in \mathbb{R}_+$, haves $y - x \in \mathbb{R}_+$, da $-(x - y) = y - x$. Derfor er $x \leq y$.

□

Definition 46. (CZ 8.3.9: Numerisk værdi)
*Lad $x \in \mathbb{R}$. Vi definerer den **numeriske værdi** $|x|$ som følger:*

$$|x| = \begin{cases} x & hvis \quad x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ -x & hvis \quad x \notin \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \end{cases}$$

Sætning 21. (CZ 8.3.10: Regneregler for numerisk værdi)
Lad $a, b \in \mathbb{R}$. Der gælder så følgende regler, som vi gengiver uden bevis:

1. $|a| = \max\{a, -a\}$
2. $|a| \geq 0$
3. $|a \cdot b| = |a||b|$
4. $|a| = |-a|$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$
6. $|a - b| \geq ||a| - |b||$
7. *Lad $\epsilon > 0$ være givet. Der gælder:* $|a - b| < \epsilon \Leftrightarrow a \in]b - \epsilon; b + \epsilon[$

Axiom 4. (CZ s.187: Axiom III: Supremumsaxiomet)

$\mathbb{R}$ *har supremumsegenskaben*

Korollar 2. (CZ 8.4.2)

$\mathbb{R}$ *har infimumsegenskaben*

Bevis. Følger trivielt af CZ Sætning 4.2.26 (Kapitel 4). □

Sætning 22. (CZ 8.4.3)
Lad $B \subseteq \mathbb{R}$ være en ikke-tom opadtil begrænset mængde, og lad $b \in \mathbb{R}$ være en øvre grænse for B. Følgende udsagn om b er ækvivalente:

i) *b er største øvre grænse for B, dvs. $b = \sup B$.*

ii) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in B : \ |x - b| < \epsilon$

iii) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in B : \ x \in]b - \epsilon; b + \epsilon[$

Bevis. Vi skal vise: $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (i)$.
I så fald haves: $((i) \Rightarrow (ii)) \wedge ((ii) \Rightarrow (iii)) \equiv (i) \Rightarrow (iii)$.

Bevis for $(i) \Rightarrow (iii)$: (vi beviser med lukkede intervaller!)
Antag $b = \text{sup}B$ og lad $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ være vilkårlig. Da er $b - \epsilon < 0$.

Da b var mindste øvre grænse for B, er $b - \epsilon$ ikke en øvre grænse for B.
Dvs. der gælder **ikke**

$$\forall x \in B: \ x \leq b - \epsilon$$

Med andre ord:

$$\sim (\forall x \in B: \ x \leq b - \epsilon) \equiv \exists x \in B : \sim (x \leq b - \epsilon)$$

For alle $u, v \in \mathbb{R}$ gælder:

$$\sim (u \leq v) \Leftrightarrow v < u$$

jævnfør tredelingsloven for $\leq$, hvilket vil sige

$$\exists x \in B: \ x > b - \epsilon$$

Da $b = \sup B$ er specielt b en øvre grænse for B, dvs. $\forall x \in B: \ x \leq b$.
Dermed fås:

$$x \leq b + \epsilon, \text{ da } b + \epsilon > b$$

$\square$

Sætning 23. (CZ 8.4.5: Den Archimediske egenskab ved $\mathbb{R}$)

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: \ n > x$$

Bevis. Ved modstrid: Antag $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}: \ 1 \cdot n \leq x$.
Dvs. x er øvre grænse for $B := \{1 \cdot n | \ n \in \mathbb{N}\}$.
Betragt $b = \sup B$. Af sætning CZ 8.4.3 følger, at $\forall \epsilon > 0 \exists y \in B: \ y \in]b - \epsilon; b + \epsilon[$.
Se på $\epsilon = 1 > 0$. Altså: $\exists m \in \mathbb{N}: \ m \cdot 1 \in]b - 1; b + 1[$.
Da er specielt $b < m \cdot 1 + 1 = (m + 1) \cdot 1$ MODSTRID! ($m \cdot 1 + 1 \in B$ og $b = \sup B$). $\square$

Skæringssætningen

Sætning 24. (Tom Lindstrøm: 'Kalkulus', Sætning 5.2.1)
Lad $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *være kontinuert, så* $f(a)$ *og* $f(b)$ *har modsat fortegn.*
Da findes $c \in \,]a; b[$*, så* $f(c) = 0$.

Bevis. Vi ved: $\quad (f(a) < 0 \land f(b) > 0)$ eller $(f(a) > 0 \land f(b) < 0)$.

Vi kan nøjes med at betragte første tilfælde. I andet tilfælde kan da funktionen $g = -f$ betragtes.

Antag altså $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Betragt en mængde $A := \{x \in [a; b] \mid f(x) \leq 0\}$. Vi har $a \in A$, $x \leq b$ for $x \in A$. Dvs. A er en ikke-tom opadtil begrænset delmængde af $\mathbb{R}$.
Altså kan $c := \sup A$ betragtes.

Påstand: $f(c) = 0$. Vi skal vise, at 1) $f(c) \leq 0$ og 2) $f(c) \geq 0$.

Bevis for 1): Af CZ Sætning 8.4.3 følger:

Til ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes $x_n \in A$, så $|x_n - c| < \frac{1}{n}$. Følgen x_n konvergerer altså mod c.

Af Sætning 5.1.7 (Kalkulus) følger, at da f er kontinuert i c og x_n konvergerer mod c, så konvergerer $f(x_n)$ mod $f(c)$. Vi har $f(x_n) \leq 0$ da $x_n \in A$.

> *Bevis ved modstrid:* Antag $f(c) > 0$.
>
> Da nu $\frac{1}{2}f(c) > 0$, og da $f(x_n) \to f(c), n \to \infty$,
> findes $n_0 \in \mathbb{N}$,
> så $|f(c) - f(x_{n_0})| < \frac{1}{2}f(c)$.
>
> Dvs. $f(c) - f(x_{n_0}) < \frac{1}{2}f(c)$ (da $f(c) > 0$ og $f(x_{n_0}) \leq 0$).
>
> Altså $0 < \frac{1}{2}f(c) < f(x_{n_0})$. MODSTRID!

Derfor har vi, at $f(c) \leq 0$.

Bevis for 2): Vi ved nu, at $f(c) \leq 0$. Altså er $c < b$, dvs. $b - c > 0$.

Altså findes $n_0 \in \mathbb{N}$, så $\frac{1}{n_0} < b - c$.

Da fås $\frac{1}{n} < b - c$ for $n \geq n_0$, dvs. $c + \frac{1}{n} < b$ for $n \geq n_0$.

Da følgen $c + \frac{1}{n}$, $n \geq n_0$ konvergerer mod c, har vi, at følgen $f\left(c + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq n_0$ konvergerer mod $f(c)$.

Da $c + \frac{1}{n}$, $n \geq n_0$ er strengt større end c, følger $c + \frac{1}{n} \notin A$. (c er supremum for A)

Altså er $f(c + \frac{1}{n}) > 0$ for $n \geq n_0$.

Da $f(c + \frac{1}{n}) \to f(c)$, fås heraf $f(c) \geq 0$.

Da vi nu har, at $f(c) \leq$ og $f(c) \geq 0$, er $f(c) = 0$, og sætningen er bevist. $\square$

Korollar 3. (Tom Lindstrøm: 'Kalkulus', Korollar 5.2.2)
Lad $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ *og* $h : [a; b] \to \mathbb{R}$ *være to kontinuerte funktioner, sådan at* $g(a) < h(a)$ *og* $g(b) > h(b)$.
Da findes der et $c \in]a; b[$ *så* $g(c) = h(c)$.
Med andre ord, de to funktioner har et skæringspunkt i intervallet $]a; b[$.

Bevis. Da g og h er kontinuerte, er $f = g - h$ det også. Vi ser, at $f(a) = g(a) - h(a) < 0$ og $f(b) = g(b) - h(b) > 0$, så ifølge Skæringssætningen findes et punkt $c \in]a; b[$ så $f(c) = 0$. Men så er også $g(c) - h(c) = 0 \Leftrightarrow g(c) = h(c)$, og sætningen er bevist. $\square$

Appendix: Resterende pensum

Euklids elementer

Første del af Euklids elementer er gennemgået ud fra et scan af danske noter (hent filen: lokalt (fra samme mappe som dette dokument) eller fra nettet). Samtlige definitioner og forudsætninger er gennemgået, såvel som beviserne for sætning 1-6.

Konstruktion af $\mathbb{R}$ ved hjælp af Cauchy-følger

Der er gennemgået frem til men ikke med Theorem 7 (side 17) ud fra noterne 'Contruction of the real numbers' af Ian Kiming (hent filen: lokalt (fra samme mappe som dette dokument) eller fra nettet).

Indeks