Matematisk uretfærdighed

Anders “Bongo” Bjerg Pedersen
Lars Roholm
Martin Hvolby
Jesper Frank Christensen

8. januar 2006

Indhold

1 Mandatfordelingsmetoder

For overskueligheds skyld introduceres hermed en række betegnelser som vil blive benyttet i det følgende.

Definition 1 (Stemme- og mandattal)**.** *For et parti, P, betegnes stemmetallet, dvs. stemmerne på pågældende parti, s_P. Det samlede stemmetal $\sum_P s_P$ betegnes S. For partiet P betegnes det antal mandater der er tildelt partiet m_P. Det samlede mandattal betegnes med M.*

Definition 2 (Fordelingsmetode)**.** *Ved en fordelingsmetode forstås en metode der eksplicit beskriver hvorledes mandaterne fordeles på partierne efter et valg.*

Definition 3 (Kvota)**.** *For et parti, P, forstås partiets kvota, k_P, som dets procentvise andel i det samlede mandattal, M, bestemt ud fra partiets procentvise andel i det samlede stemmetal, S.*

1.1 Største brøks metode

Denne fordelingsmetode er en af de mest simple og intuitive. Som det senere skal vise sig kan man imidlertid støde på visse problemer med metoder som denne. Metoden foregår trinvis som følger:

1. Samtlige partiers kvota udregnes og partierne tildeles det antal mandater som svarer til *heltalsdelen*[1] af partiets kvota.

2. Det parti der har den største rest til overs får et mandat, dernæst partiet med næststørst rest til overs osv. indtil alle mandater er fordelt.

Vi vil illustrere metoden med et lille eksempel[2].

Eksempel 1. *Vi antager at vi har 3 partier A, B og C. Vi sætter $S = 600$, $M = 4$ og laver en fordeling af stemmerne på de forskellige partier. Vi antager således at $s_A = 335$, $s_B = 200$ og $s_C = 65$.*

	s_i	*% af S*	k_i	n	r	m_i
A	*335*	*56%*	*2,2*	*2*	*0,2*	*2*
B	*200*	*33%*	*1,3*	*1*	*0,3*	*1*
C	*65*	*11%*	*0,4*	*0*	*0,4*	*1*

1.1.1 To paradokser

Som sagt kan vi komme i situationer hvor største brøks metode giver vanskelige resultater. Dette giver sig til kende i to paradokser, hhv. Monotoniparadokset og Alabamaparadokset. Disse vil vi kort beskrive.

[1]Ved heltalsdelen, n, af et tal forstås; tallet fraregnet dets decimaler (resten, r). For f.eks. 4.6 er heltalsdelen 4.

[2]Eksemplet er hentet fra Ebbe Thue Poulsens bog om Mandatfordelingsproblemet. Samme gælder for følgende eksempler med 3 partier.

Monotoniparadokset Dette illustreres lettest ved et eksempel.

Eksempel 2. *Vi antager at vi, som ved foregående eksempel, har 3 partier* A, B *og* C. *Vi sætter* $S = 460$, $M = 4$ *og laver en fordeling af stemmerne på de forskellige partier. Vi antager således at* $s_A = 195$, $s_B = 195$ *og* $s_C = 70$.

	s_i	% af S	k_i	n	r	m_i
A	195	42%	1.7	2	0,7	2
B	195	42%	1.7	1	0,7	2
C	70	15%	0,6	0	0,6	0

Sammenlignes dette eksempel med foregående ses at parti C er gået frem imens partierne A og B er gået tilbage, men alligevel har C mistet sit mandat. Er det retfærdigt? Dette er det vi vil kalde *Monotiniparadokset*.

Alabamaparadokset Vi giver igen et indledende eksempel.

Eksempel 3. *Vi antager at vi, som ved Eksempel 1, har 3 partier* A, B *og* C. *Vi sætter* $S = 600$, $M = 5$ *og laver en fordeling af stemmerne på de forskellige partier. Vi antager således at* $s_A = 335$, $s_B = 200$ *og* $s_C = 65$. *Det eneste der er ændred fra første eksempel er altså det samlede mandattal.*

	s_i	% af S	k_i	n	r	m_i
A	335	56%	2,8	2	0,8	3
B	200	33%	1,7	1	0,7	2
C	65	11%	0,5	0	0,5	0

Samenlignes dette eksempel med første eksempel ses det at parti C mister sit mandat ved en forøgelse af mandattallet. Er det retfærdigt? Dette fenomen vil vi fremover kalde *Alabamaparadokset*[3].

1.2 Divisormetoder

Der findes imidlertid fordelingsmetoder der ungår disse paradokser. Vi vil her gennemgå princippet bag divisormetoder samt nogle af de mest benyttede af disse. Metoden forløber som følger:

1. En *divisormetode* er bestems ud fra dens *divisorer*. Der vælges således en følge af ikke-negative divisorer, $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$. Disse karakteriserer fordelingsmetoden.

2. Der laves nu en kolonne for hvert parti, P, indeholdende $\frac{s_P}{d_1}, \frac{s_P}{d_2}, \frac{s_P}{d_3}, \ldots$. Således dannes et skema af disse tal.

3. Mandaterne fordeles nu imellem partierne ved at give første mandat til højeste fremkomne tal i skemaet næste mandat til næsthøjeste tal og så fremdeles indtil alle mandater er fordelt.

[3]Navnet skyldes at det, da det blev offentlig kendt,kunne have gået ud over staten Alabamas repræsentation i Repræsentanternes Hus i USA

Ved nogle divisormetoder tillader man $d_1 = 0$ og vedtager at $\frac{s_P}{0} = \infty$. Således er alle partier sikret et mandat. Dette forudsætter selvfølgelig at der er flere mandater end partier.
De to mest udbredte fordelingsmetoder er dem vi kender som *d'Hondts metode*[4] og *Sainte-Leguës metode*[5]. I Danmark benyttes også en modificeret udgave af Sainte-Leguës metode.

d'Hondts metode Ved d'Hondts divisormetode benytter vi divisorerne $1, 2, 3, \ldots$. Vi vil som eksempel bruge metoden på partierne fra Eksempel 1.

Eksempel 4. *Vi antager at vi har 3 partier* A, B *og* C*, vi sætter* $S = 600$ *og fordeler igen stemmerne på de forskellige partier således at* $s_A = 335$*,* $s_B = 200$ *og* $s_C = 65$*. Vi vil nu fordele mandaterne med d'Hondts fordelingsmetode og opskriver nedenstående skema.*

	s_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
A	*335*	335_1	168_3	112_4	84_6	67_7	*56*
B	*200*	200_2	100_5	$66,7_8$	*50*	*40*	*33,3*
C	*65*	65_9	*32.5*	*22*	*16*	*13*	*11*

Tallene der her udløser mandaterne er markeret med nummeret på mandatet. Det ses således at parti C *først får et mandat hvis der uddeles mere end 9 mandater.*

Sainte-Leguës metode Ved Sainte-Leguës divisormetode benytter vi divisorerne $1, 3, 5, \ldots$. Vi vil igen illustrere metoden med et eksempel.

Eksempel 5. *Det er igen partierne og stemmefordelingen fra Eksempel 1 vi benytter. Vi vi har altså 3 partier* A, B, C*,* $S = 600$*,* $s_A = 335$*,* $s_B = 200$ *og* $s_C = 65$*. Vi fordeler mandaterne med Sainte-Leguës metode og opskriver nedenstående skema.*

	s_i	*1*	*3*	*5*	*7*	*9*	*11*
A	*335*	335_1	112_3	67_4	*48*	*37*	*30*
B	*200*	200_2	$66,7_5$	*40*	*29*	*22*	*18*
C	*65*	65_6	*21,7*	*13*	*9*	*7*	*6*

Det ses at ved Sainte-Leguës metode får parti C *allerede dets mandat når der uddeles 6 mandater eller flere.*

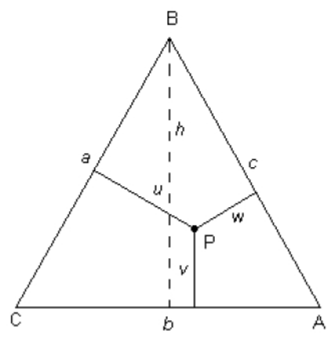
Sainte-Leguës modificerede metode Denne er næsten den samme som den almindelige Sainte-Leguë metode. Forskellen er at den første divisor er erstattet med 1,4. Vi har således divisorerne $1, 4, 3, 5, 7, \ldots$. Denne metode bliver bl.a. brugt ved det danske folketingsvalg. Ideen er at første mandat skal være "dyrere".

[4]Opkaldt efter den belgiske jurist Victor d'Hondt (1841-1901).
[5]Opkaldt efter den franske matematiker Jean André Sainte-Leguë (1882-1950).

1.3 Geometrisk repræsentation af fordelinger

Som vi senere skal se kan man illustrere fordelingerne på en meget uoverskuelig måde geometrisk. Til det formål får vi brug for et par begreber:

Sætning 1 (Et punkts afstand fra siderne i en trekant)**.** [6] *Lad P være et vilkårligt punkt i en ligesidet trekant ABC, og lad u, v og w betegne P's afstande fra de tre sider, målt i procent af højden i $\triangle ABC$. Så er $u+v+w = 100\%$.*



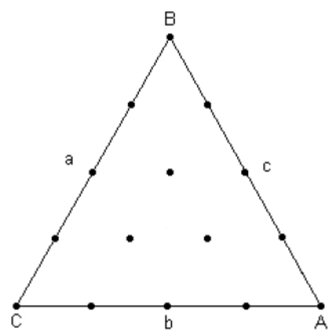
Bevis. Vi deler $\triangle ABC$ i 3 mindre trekanter $\triangle PCA$, $\triangle ABP$ og $\triangle PBC$. Betragt nu trekanten PCA. Højden fra P i denne er netop v, altså v procent af højden h. Vi ved at for en trekant med højde, h, vinkelret på grundlinien, g, er arealet givet ved $A_{trekant} = \frac{1}{2}hg$. Følgelig må arealet af $\triangle PCA$ være v procent af $\triangle ABC$'s areal. Det samme gælder for arealerne af $\triangle ABP$ og $\triangle PBC$. Da arealet af $\triangle ABC$ må være lig summen af arealerne af de mindre trekanter følger det at $u + v + w = 100\%$. $\square$

Definition 4 (Et punkts repræsentation af en stemmefordeling)**.** *Lad der være givet en stemmefordeling med tre stemmetal s_A, s_B og s_C. Et punkt, P, i $\triangle ABC$ siges at represientere stemmefordelingen, hvis de tal u, v og w, der angiver P's afstande til trekantens sider målt i procent af højden h er;*

$$u = \frac{s_A}{s_A + s_B + s_C} \cdot 100, \quad v = \frac{s_B}{s_A + s_B + s_C} \cdot 100, \quad w = \frac{s_C}{s_A + s_B + s_C} \cdot 100.$$

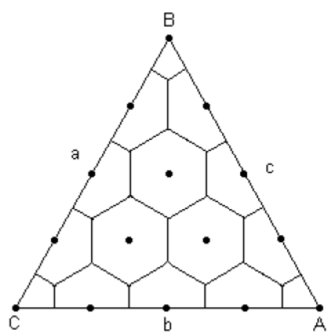
Bemærk at for punktet $P = A$ svarer det altså til at $s_B = s_C = 0$, dvs. at partiet A har fået samtlige stemmer. Ligger punktet, P, derimod på liniestykket BC svarer det til at partiet A ingen stememr har fået. Illustrationen herunder viser de 15 mulige fordelinger af 4 mandater mellem de 3 partier.

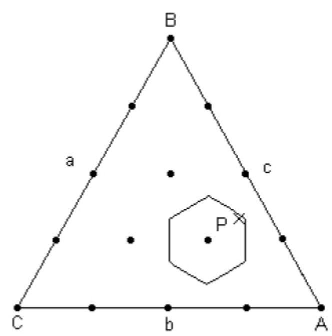
[6] sætningen er hentet fra Ebbe Thue Poulsens bog om mandatfordelingsproblemet.



1.4 Repræsentation af største brøks metode

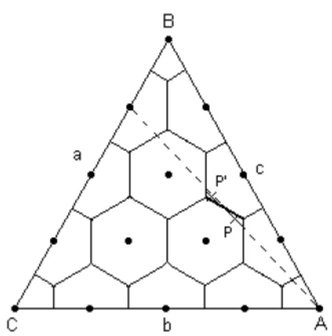
På figuren herunder ses hvordan mandaterne vil blive fordelt ud fra et geometrisk synspunkt. Hver sekskant representerer en af de mulig 15 fordelinger af 4 mandater. Dermed vil man fidne fordelingen ud fra den sekskant punktet P ligger i. På figuren til højre den sekskant der giver fordelingen fra Eksempel 1 samp punktet indtegnet.





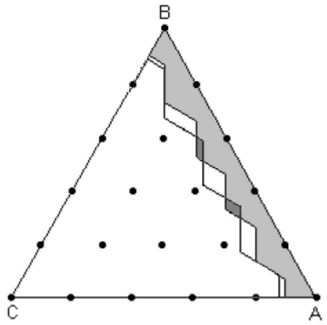
Vi kan imidlertid også illustrere de paradokser man kunne opnå med største brøks metode hvorved problemet let billedliggøres.

Monotoniparadokset På figuren nedenfor er stemmefordelingerne fra Eksempel 1 og Eksempel 2 markeret.



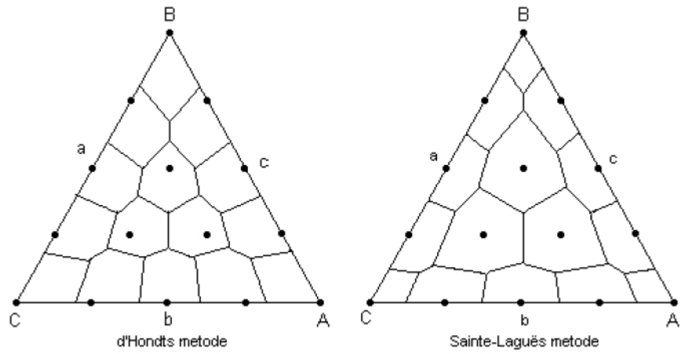
Da disse to punkter ligger i hvert sin sekskant giver fordelingsmetoden altså to forskellige mandatfordelinger. Linien markeret med gråt svarer til alle de mulige stemmefordelinger hvor partierne B og$C$'s stemmer fastholdes til hhv. 200 og 65. Der findes altså mange punkter på denne linie der udløser forskellige mandatfordelinger.

Alabamaparadokset Som tidligere nævnt opstod Alabamaparadokset f.eks. når antallet af mandater hæves fra 4 til 5. På figuren herunder er De mulige mandatfordelinger med 5 mandater er markered med prikker. Grænserne for hvornår partiet C ingen mandater får for hhv. uddeling af 4 og 5 mandater er også indtegnet.



Det lyst skraverede område er det hvor parti C ingen mandater får. De mørk skraverede områder er dem hvor partiet C får et mandat ved uddeling af 4 mandater, men ingen mandater ved uddeling af 5 mandater. Det er altså i det mørkt skraverede område paradokset indtræffer.

d'Hondts og Sainte-Leguës metoder Herunder ses d'Hondts og Sainte-Leguës metoder illustreret. Det er igen de små sekskantede områder der repræsenterer de forskellige mandatfordelinger.



Det ses at der ved mangle stemmefordelinger vil opnås samme resultat ved brug af både største brøks metode, d'Hondts metode og Sainte-Leguës metode. Men der er imidlertid store forskelle imellem de forskellige fordelingsmetoder. Bemærk at de liniestykker der adskiller de sekskantede områder alle ligger på rette linier der skærer enten punktet A, B eller C. Dette medvirker til at monotoniparadokset ikke kan indtræffe.

2 Mandatfordelingens retfærdighed

Som gennemgået ovenfor, kan man opstille nogle matematiske krav til en mandatfordeling. Hvis disse principper er opfyldt, siges fordelingsmetoden at være retfærdig. Men som nævnt, så er der ingen metoder, som opfylder princip 8 og derved er fuldstændigt retfærdigt. Altså må vi i stedet betragte hvor uretfærdig en given fordelingsmetode er. Dette kan gøres matematisk. Retfærdighed kan forstås som, at der ikke er afvigelse mellem værdien for kvota og mandat. Da må der gælde, at en fordeling er uretfærdig, hvis der er afvigelse mellem disse. Altså repræsenterer forskellen mellem disse to værdier et udtryk for uretfærdigheden. Dvs. for et givent parti, P er uretfærdigheden, U givet ved: $U = k_p - m_p$. En positiv værdi af U tilkendegiver, at partiet er blevet tilgodeset, mens en negativ at det er blevet "snydt".
Når vi betragter en fordelingsmetodes uretfærdighed er det væsentligt, at der kan skelnes mellem uretfærdighed set fra partiets synspunkt eller for den enkelte vælger. Da hvert mandat repræsenterer et antal stemmer, kan man fra det omvendte perspektiv sige, at hver vælger er repræsenteret ved en procentdel af et mandat, dvs. $\frac{M}{S}$. Vi betragter nu et parti P, som med s_P stemmer ved fordelingen har fået m_P mandater. Da er alle de vælgere der stemt på netop dette parti hver især repræsenteret ved følgende mandatkvotient: $\frac{m_P}{s_P}$. Uretfærdigheden for en vælger fra parti, P er altså afvigelsen: $\frac{M}{S} - \frac{m_P}{s_P}$.

2.1 Den totale uretfærdighed

For at få et ordentligt overblik over en mandatfordelings retfærdiged er vi nødt til at betragte hhv. alle partierne og alle vælgernes retfærdighhed samlet set. Som vi skal se, kan man dog definere denne totale uretfærdighed på forskellige måder. Vi starter med den mest benyttede.

2.1.1 Partiernes totale uretfærdighed

Vi kan opfatte talsættene bestående af hhv. partiernes kvotaer og deres mandater som to punkter i $\mathbb{R}^n$, hvor $n \in \mathbb{N}$ er antallet af partier. Således kan vi bruge afstanden mellem punktet for kvotaerne og punktet for mandatfordelingen som en angivelse af uretfærdighedens størrelse.

Definition 5. *Ved et valg har partierne $A, .., L$ fået kvotaerne $k_A, ..., k_L$ og efterfølgende tildelt mandattalene $m_A, ..., m_L$. Den totale uretfærdighed er da givet som afstanden:*

$$U_P = \sqrt{(k_A - m_A)^2 + ... + (k_L - m_L)^2}$$

Men hvorfor er det denne geometriske afstand som skal bruges som målestok for uretfærdighedens størrelse. Man kunne også anskue dette ved andre matematiske størrelser. Alternative *uretfærdigheds-mål* kunne være:

- *Den totale numeriske uretfærdighed*

$$U_P^{'} = |k_A - m_A| + ... + |k_L - m_L|$$

- *Den maksimale uretfærdighed*

$$U_P^{''} = \max\{k_Q - m_Q | Q = A, .., L\}$$

- *Den maksimale numeriske uretfærdighed*

$$U_P^{'''} = \max\{|k_Q - m_Q| | Q = A, ..L\}$$

De to nederste er altså udtryk for situationer, hvor man er opmærksom på, om et af partierne ikke behandles yderst uretfærdigt i forbindelse med mandatfordelingen.

2.1.2 Vælgernes totale uretfærdighed

Vi kan naturlivis også finde et udtryk for hvor stor uretfærdighed der forvoldes mod vælgerne som helhed.

Definition 6. *Ved et valg med S stemmer og fordeling af M mandater, får partierne $A, .., L$ hhv. $s_A, ..., s_L$ stemmer og $m_A, ..., m_L$ mandater. Uretfærdigheden for en vælger for parti P er ovenfor defineret ved afvigelsen $\frac{M}{S} - \frac{m_P}{s_P}$. For partiet P er den samlede uretfærdighed således produktet af antallet af stemmer på dett parti, s_P og den individuelle uretfærdighed, $\frac{M}{S} - \frac{m_P}{s_P}$. Den totale uretfærdighed er da givet ved:*

$$U_V = \sqrt{s_A\Big(\frac{M}{S} - \frac{m_A}{s_A}\Big)^2 + ... + s_L\Big(\frac{M}{S} - \frac{m_L}{s_L}\Big)^2}$$

Vi kan omskrive dette udtryk. Betragt kvadratrodens indhold, X:

$$\begin{aligned} X &= s_A\Big(\frac{M}{S} - \frac{m_A}{s_A}\Big)^2 + ... + s_L\Big(\frac{M}{S} - \frac{m_L}{s_L}\Big)^2 \\ &= s_A\Big(\frac{m_A}{s_A}^2 + \frac{M^2}{S^2} - 2\frac{M}{S}\frac{m_A}{s_A}\Big) + ... + s_L\Big(\frac{m_L}{s_L}2 + \frac{M^2}{S^2} - 2\frac{M}{S}\frac{m_L}{s_L}\Big) \\ &= \frac{{m_A}^2}{s_A} + .. + \frac{{m_L}^2}{s_L} + (s_A + ... + s_L)\frac{M^2}{S^2} - 2(m_A + ... + m_L)\frac{M}{S} \\ &= \frac{{m_A}^2}{s_A} + .. + \frac{{m_L}^2}{s_L} + S\frac{M^2}{S^2} - 2M\frac{M}{S} \\ &= \frac{{m_A}^2}{s_A} + .. + \frac{{m_L}^2}{s_L} - \frac{M^2}{S} \end{aligned}$$

Altså er den totale uretfærdighed for vælgerne givet ved

$$U_V = \sqrt{\frac{{m_A}^2}{s_A} + .. + \frac{{m_L}^2}{s_L} - \frac{M^2}{S}} \tag{1}$$

Ligeledes kan der også fra vælgernes synspunkt benyttes alternative *uretfærdigheds-mål*:

- *Den totale numeriske uretfærdighed*

$$U_V^{'} = s_A\Big|\frac{M}{S} - \frac{m_A}{s_A}\Big| + ... + s_L\Big|\frac{M}{S} - \frac{m_L}{s_L}\Big|$$

- *Den maksimale uretfærdighed*

$$U_V^{''} = \max\Big\{\frac{M}{S} - \frac{m_Q}{s_Q}|Q = A, .., L\Big\}$$

- *Den maksimale numeriske uretfærdighed*

$$U_V^{'''} = \max\Big\{\Big|\frac{M}{S} - \frac{m_Q}{s_Q}\Big||Q = A, ..L\Big\}$$

2.2 Bestemmelse af den "mest" retfærdige mandatfordeling

Indledningsvist erkendte vi, at der ikke findes fuldstændigt retfærdige fordelingssystemer. Vi vil derfor fokusere på egenskaben "mest" refærdigt, eller ækvivalent mindst uretfærdigt. Til dette bruger vi de ovenævnte definitioner. For at forbedre overblikket betragter vi kun de to mest almindelige "uretfærdigheds-mål", U_P og U_V. Det er klart, at jo mindre værdier disse antager, jo mere retfærdigt er mandatfordelingen. Vi vil undersøge hvilket af fordelingsystemerene der er mest retfærdigt.
For de følgende definitoner og sætninger betragtes en situation, hvor M mandater skal fordeles mellem partierne $A, ..., L$. De S stemmer er fordelt ved $s_A, ..., s_A$, hvilket giver partiene kvotaerne $k_A, ..., k_L$.

2.2.1 Den mest retfærdige mandatfordeling er

1. For partierne: Den mandatfordeling, $m_A, ..., m_L$ som giver den mindst mulige værdi for U_P, med U_P defineret som ovenfor.

2. For vælgerne: Den mandatfordeling, $m_A, ..., m_L$, som giver den mindst mulige værdi for U_V, med U_V defineret som ovenfor.

Hvis vi lægger disse definitioner for "mest refærdigt" til grundlag for vurdering af de fordelingsmetoder vi har behandlet, så gælder følgende sætninger:

Sætning 2.

1. *For partierne er den mest retfærdige mandatfordeling "største brøks metode".*

2. *For vælgerne er den mest retfærdige mandatfordeling synspunkt "Sainte-Laguës metode".*

Vi har valgt ikke at bevise ovenstående sætninger men derimod illustrere, at de gælder, ved at se på aktuelle kommunalvalgstal og anvende de forskellige metoder herpå. Til dette har vi i det følgende afsnit konstrueret en Maple-procedure, der kan udregne de væsentlige nøgletal for os.

3 Case studies

Vi vil i dette afsnit se på nogle aktuelle tal fra kommunalvalget 2005, specielt fra Tønder kommune. Vi vil konstruere en procedure i Maple, der kan knække alle tallene for os og give os et billede af, hvor retfærdig hver af metoderne er.

I bilag XX er tallene fra Eksempel 1 kørt igennem programmet for at illustrere, dels at programmet regner rigtigt, og dels den skønne æstetiske udformning af koden og outputtet.

3.1 Maple-procedurer

Vi får først brug for en hjælpeprocedure, der kan finde det største element i en given matrix (uanset størrelse) og angive dette største elements placering i matricen (altså dets række- og søjlenummer). Denne procedure kalder vi 'maximum', og dens kildekode er angivet nedenfor. Proceduren tager som input en matrix, A, og fire grænser, a, b, c, d, som er det område i matricen, proceduren skal arbejde på. Som output giver proceduren så en liste med det største elements rækkenummer og søjlenummer, som kan bruges i andre procedurer.

```
> maximum := proc(A::Matrix,a,b,c,d)
  local M,n,i,j;
   M := A[a,c];
   n := [a,c];
   for i from a to b do
      for j from c to d do
         if A[i,j] > M then
           M := A[i,j];
           n:=[i,j];
         end if;
      end do;
   end do;
   return [n[1],n[2]];
end proc:
```

Nu kommer så selve humlen: proceduren, der rent faktisk kan regne på tallene. Denne procedure tager som input en liste, A, med stemmernes fordeling på de enkelte partier og det antal mandater, der skal fordeles (M). Proceduren går nu i gang med at fordele de M mandater efter fire forskellige metoder: største brøks metode, d'Hondts metode, Sainte-Leguës metode og Sainte-Leguës modificerede metode. Proceduren starter med at oprette matricer/skemaer til hver metode og giver sig så i kast med at lave alle udregningerne og derefter fordele mandaterne, bl.a. vha. ovennævnte hjælpeprocedure 'maximum'.
Til sidst udregnes for de fire metoder fire forskellige uretfærdighedsmål (U_V, U_V'', U_P, U_P''), og alle resultater sendes ud på skærmen. Bemærk, at Maple ikke kan vise matricer over en vis størrelse direkte på skærmen, men et højreklik giver muligheden 'Browse', der åbner en tabel, hvor udregningerne kan ses. Yderligere kommentarer til procedurens fremgangsmåde kan ses i kildekoden (tekst efter en #):

```
> mandat:=proc(A,M)
local S,i,j,k,l,m,n,p,q,r,s,N,T,W1,W2,W3,temp,UV,SBM,MSBM,DH,SL,MSL;  #Lokale variable.

S:=sum(A[a],a=1..nops(A));  #Gemmer samlet stemmeantal i S.

#Følgende konstruerer de forskellige skemaer og indsætter overskrifter:

SBM:=RandomMatrix(nops(A)+1,6);
SBM[1,1]:='s';SBM[1,2]:='procent';SBM[1,3]:='k';SBM[1,4]:='n';SBM[1,5]:='r';SBM[1,6]:='m';
DH:=RandomMatrix(M+2,nops(A)+1);DH[1,1]:='s';DH[M+2,1]:='m';
SL:=RandomMatrix(M+2,nops(A)+1);SL[1,1]:='s';SL[M+2,1]:='m';
MSL:=RandomMatrix(M+2,nops(A)+1);MSL[1,1]:='s';MSL[M+2,1]:='m';
Digits:=2;

#Følgende udregner divisionerne i skemaerne og indsætter på de korrekte pladser:
for i from 1 to nops(A) do
   SBM[i+1,1]:=A[i];
   SBM[i+1,2]:=evalf(100*A[i]/S);
   SBM[i+1,3]:=evalf(M/100*SBM[i+1,2]);
   SBM[i+1,4]:=trunc(SBM[i+1,3]);
   SBM[i+1,5]:=SBM[i+1,3]-SBM[i+1,4];
   SBM[i+1,6]:=SBM[i+1,4];
   DH[1,i+1]:=A[i];
   SL[1,i+1]:=A[i];
   MSL[1,i+1]:=A[i];

   for j from 1 to M do
      Digits:=4;
      DH[j+1,i+1]:=evalf(A[i]/j);
      SL[j+1,i+1]:=evalf(A[i]/(2*j-1));
      MSL[j+1,i+1]:=evalf(A[i]/(2*j-1));
      Digits:=2;
   end do;

end do;

#Følgende indsætter selve divisorerne i skemaerne:

for k from 1 to M do
  DH[k+1,1]:=k;
  SL[k+1,1]:=2*k-1;
  MSL[k+1,1]:=2*k-1;
end do;

#Følgende tager sig af den specielle divisor 1.4 i den modificerede Sainte-Leguës:

MSL[2,1]:=1.4;

for m from 1 to nops(A) do
  MSL[2,m+1]:=evalf(A[m]/MSL[2,1]);
end do;

#Følgende fordeler mandater i største brøkers metodes skema:

Digits:=10;
N:=M-add(SBM[i+1,4],i=1..nops(A));  #Afgør, hvor mange mandater, der mangler at blive fordelt.
temp:=Column(SBM,5);                #Tager "backup" af 'r'-kolonnen.
MSBM:=SBM;                          #Tager kopi af skemaet for største brøkers metode.

for n from 1 to N do                #Tildeler partiet med det maksimale element et mandat, N gange.
   T:=maximum(MSBM,2,nops(A)+1,5,5)[1];
   MSBM[T,6]:=MSBM[T,6]+1;
   MSBM[T,5]:=0;
end do;

for p from 1 to nops(A)+1 do        #Henter 'r'-kolonnen ind i igen.
   SBM[p,5]:=temp[p];
end do;

#Følgende fordeler mandater i de resterende skemaer på nogenlunde samme måde som ovenfor:

for r from 1 to nops(A) do
  DH[M+2,r+1]:=0;
  SL[M+2,r+1]:=0;
  MSL[M+2,r+1]:=0;
end do;

for q from 1 to M do
  W1:=maximum(DH,2,M+1,2,nops(A)+1);
  DH[M+2,W1[2]]:=DH[M+2,W1[2]]+1;
  DH[W1[1],W1[2]]:=0;
  W2:=maximum(SL,2,M+1,2,nops(A)+1);
  SL[M+2,W2[2]]:=SL[M+2,W2[2]]+1;
  SL[W2[1],W2[2]]:=0;
  W3:=maximum(MSL,2,M+1,2,nops(A)+1);
  MSL[M+2,W3[2]]:=MSL[M+2,W3[2]]+1;
  MSL[W3[1],W3[2]]:=0;
end do;
```

```
#Følgende udregner diverse uretfærdighedsmål for de forskellige metoder:

UV:=RandomMatrix(5,5); UV[1,1]:='Metode'; UV[2,1]:='St.Br.Metode'; UV[3,1]:='d´Hondt';
UV[4,1]:='SainteLaguës'; UV[5,1]:='ModificeretSL';
UV[1,2]:='U[P]';UV[1,3]:='U´´[P]';UV[1,4]:='U[V]';UV[1,5]:='U´´[V]';
Digits:=3;

UV[2,2]:=evalf(sqrt(add((SBM[m,3]-SBM[m,6])^2 , m=2..nops(A)+1)));
UV[3,2]:=evalf(sqrt(add((SBM[m,3]-DH[M+2,m])^2,m=2..nops(A)+1)));
UV[4,2]:=evalf(sqrt(add((SBM[m,3]-SL[M+2,m])^2,m=2..nops(A)+1)));
UV[5,2]:=evalf(sqrt(add((SBM[m,3]-MSL[M+2,m])^2,m=2..nops(A)+1)));

UV[2,3]:=evalf(add(abs(SBM[m,3]-SBM[m,6]),m=2..nops(A)+1));
UV[3,3]:=evalf(add(abs(SBM[m,3]-DH[M+2,m]),m=2..nops(A)+1));
UV[4,3]:=evalf(add(abs(SBM[m,3]-SL[M+2,m]),m=2..nops(A)+1));
UV[5,3]:=evalf(add(abs(SBM[m,3]-MSL[M+2,m]),m=2..nops(A)+1));

UV[2,4]:=evalf(sqrt(add(SBM[m,6]^2/SBM[m,1] , m=2..nops(A)+1)-M^2/S));
UV[3,4]:=evalf(sqrt(add(DH[M+2,m]^2/DH[1,m] , m=2..nops(A)+1)-M^2/S));
UV[4,4]:=evalf(sqrt(add(SL[M+2,m]^2/SL[1,m] , m=2..nops(A)+1)-M^2/S));
UV[5,4]:=evalf(sqrt(add(MSL[M+2,m]^2/MSL[1,m] , m=2..nops(A)+1)-M^2/S));

UV[2,5]:=evalf(max(seq(M/S-SBM[m,6]/SBM[m,1] , m=2..nops(A)+1)));
UV[3,5]:=evalf(max(seq(M/S-DH[M+2,m]/DH[1,m] , m=2..nops(A)+1)));
UV[4,5]:=evalf(max(seq(M/S-SL[M+2,m]/SL[1,m] , m=2..nops(A)+1)));
UV[5,5]:=evalf(max(seq(M/S-MSL[M+2,m]/MSL[1,m] , m=2..nops(A)+1)));

#Følgende udskriver alle de fundne resultater:

print("Største brøkers metode");print(SBM);print("");print("");
print("d'Hondts metode");print(DH);print("");print("");
print("Sainte-Leguës metode");print(SL);print("");print("");
print("Sainte-Leguës modificerede metode");print(MSL);print("");print("");
print(UV);

#Højreklik på matricerne og vælg 'Browse', hvis de er for store til, at Maple kan vise dem på skærmen.

end proc:
```

3.2 Case: Tønder 2005

Med denne Maple procedure kan vi nu bestemmede 4 mandatfordelinger for en hvilken som stemmefordeling. Vi skal som nævnt blot indtaste sættet af stemmetal og dernæst mandtattalet i de respektive kommnadoer.
Vi har valgt, at illustrere sætningerne om de "mest retfærdige" fordelingssystemer ved stemmeafgivelsen i Tønder ved kommunalvalget i 2005. Til dette valg skulle 31 mandater placeres. 11 partier stillede op. På Bilag 1 kan man bl.a. se partiernes kendelsesbogstaver samt deres respektive stemmetal.
For at får Maple til at udregne de ønskede nøgletal skriver vi da:

```
> Tønder:=[6034,329,1498,590,559,634,970,978,10045,303,341];
> mandat(Tønder,31);
```

3.2.1 Mandatfordelingen i Tønder 2005

Maple giver da følgende 4 mandatfordelinger.

Metode	A	B	C	F	K	L	O	S	V	Z	Ø
Største brøks	8	1	2	1	1	1	1	1	14	0	1
d'Hondts	10	0	2	0	0	1	1	1	16	0	0
Sainte-Leguës	9	0	2	1	1	1	1	1	15	0	0
Sainte-Leguës mod.	9	0	2	1	1	1	1	1	15	0	0

Som vi kan se, så er det altså kun de to former af Sainte-Leguës metode, som giver samme mandatfordeling. Inden vi går videre og etrgater "retfærdighedsmålene", vil vi lige hæfte os ved en interessant detalje. Den opmærksomme læser, lagde i Bilag 1 måske mærke til den "virkelige" mandatfordeling, som er:

Metode	A	B	C	F	K	L	O	S	V	Z	Ø
Mandatfordelingen	9	0	2	1	1	0	1	1	16	0	0

Denne fordelingen stemmer altså ikke overens med nogen af de ovenstående, og dermed altså heller ikke med d'Hondts metode, som man benytter til kommunalvalg i Danmark. Hvordan kan dette være muligt? Er der fejl i vores Maple-procedure? Nej, det skyldes blot brugen af valgforbund. Disse kan ses i Bilag 1. Dette betyder, at mandaterne istedet tildeles valgforbundet, som så må uddele dem på partierne efter indbyrdes aftaler. På denne måde kan man bedre forhindre at et mandat går tabt og derved mindske uretfærdigheden for en selv.

3.2.2 Uretfærdighed i Tønder 2005

Metode	U_P	U_P''	U_V	U_V''
Største brøks	1.17	3.35	0.525e-1	0.139e-2
d'Hondts	2.96	7.57	0.723e-1	0.139e-2
Sainte-Leguës	1.55	4.39	0.496e-1	0.139e-2
Sainte-Leguës mod.	1.55	4.39	0.496e-1	0.139e-2

Denne tabel understøtter sætningerne om hvilke metoder der er mest retfærdige. Set fra partiernes synspunkt er "største brøks" metode mest refærdig mens, "Sainte-Leguës" er det for vælgerne. Ved betragtning af de to alternative retfærdighedsmål ses det, Største brøks metode igen er den mest refærdige for partierne, mens U_V'' er den samme for alle metoderne. Dette skyldes, at mindst et af partierne ar fået nul mandater. Dettes partis repræsentationskvotient pr. vælger er således også nul og afvigelsen maksimeres. Det er jo altså interessant, at det ikke er nogen af disse to "mest retfærdige" metoder, som benyttes ved kommunalvalg herhjemme, men derimod d'Hondt. Man kunne være fristet til at tro, at denne metode er valgt, fordi den ligger sådan midt i feltet ved vurdering af metoderne. Men ved betragtning af U_P og U_V ses det, at det faktisk er den mest uretfærdige af de fire. Årsagen til brugen af d'Hondt skal især findes i traditioner og formalia, men muligivis også i dens tilgodeseelse af de større partier. Så kan man jo spørge sig selv om det er retfærdigt? Matematisk set er det det ihvertfald ikke!

4 Kilder

- Folketingets information om det danske valgsystem
  http://www.folketinget.dk/BAGGRUND/Valg/VALG_010.htm

- Tohru Ogawa & Taeko Ogawa: *Geometry of Democracy*
  http://members.tripod.com/vismath7/proceedings/ogawa1.htm

- Ebbe Thue Poulsen: *Matematik og Retfærdighed - Mandatfordelings-problemet*, Aspekt Serien, 2000, ISBN 8700398764
- DRs samling af stemmetal fra kommunalvalget 2005: http://www.dr.dk/valg.

5 Bilag

Bilag er vedlagt sidst i rapporten.