Operationsanalyse 1
Obligatorisk opgave 1

Anders "Bongo" Bjerg Pedersen

4. juni 2006

Opgave 1

(a)

Vi tilføjer slack-variable til (P):

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize } Z &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{subject to} \\
x_1 + x_3 + x_4 &= 3 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 7 \\
x_1 - x_3 + x_6 &= 1 \\
x_i &\geq 0,\ i = 1, \dots, 6.
\end{aligned}
$$

Og opskriver nu det duale problem (D):

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize } W &= 3y_1 + 7y_2 + y_3 \\
\text{subject to} \\
y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq -2 \\
3y_2 &\geq -1 \\
y_1 + y_2 - y_3 &\geq 1 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0 \\
y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(b)

En mulig initial feasible basis for (P) kan være $B^1 = \{4, 5, 6\}$ (slack-variablene), da $x^{B^1} = (0, 0, 0, 3, 7, 1) \geq 0_6$ er løsning til (P) med $x_j = 0\ \forall j \in N = \{1, 2, \dots, 6\} \backslash B$.

(c)

Vi opskriver nu simplex-tableauet for (P) mht. B^1:

	B^1	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$R1$	Z	1	-2	-1	1	0	0	0	0
$R2$	x_4	0	1	0	1	1	0	0	3
$R3$	x_5	0	2	3	1	0	1	0	7
$R4$	x_6	0	1	0	-1	0	0	1	1

Vi opskriver så simplex-tableauet for (P) mht. B^1 som ligningssystem:

$$Z = -2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3,$$

Og får efter en smule omrokering:

$$Z = -2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3,$$

med

$$\begin{aligned} x^{B^1} &= (0,0,0,3,7,1)^T, \\ d^1 &= (1,0,0,-1,-2,-1)^T, \\ d^2 &= (0,1,0,0,-3,0)^T, \\ d^3 &= (0,0,1,-1,-1,1)^T. \end{aligned}$$

Vi ser nu i tableauet, at værdien under x_1 er -2. Denne værdi indikerer en negativ reduced cost for x_1 ($r_1 = -2$), derfor vil det være nærliggende at optimere vores initiale basic solution ved at få x_1 ind i en ny basis, B^2, hvor den udskiftes med én af de eksisterende basisvariable. Vi skal derfor finde største δ^* blandt $\delta \geq 0$, så $x^{B^1} + \delta \cdot d^1 \geq 0$. Vi får ved hurtig udregning, at

$$\delta^* = \min \left\{ \frac{x_4^{B^1}}{\bar{a}_{1,1}}, \frac{x_5^{B^1}}{\bar{a}_{1,2}}, \frac{x_6^{B^1}}{\bar{a}_{1,3}} \right\} = \min \left\{ 3, \frac{7}{2}, 1 \right\} = 1.$$

Altså er vores $\delta^* = \delta^{x_6} = 1$,, som desuden opfylder, at $x^{B1} + \delta^* \cdot d^1 \geq 0_6$. Vi udskifter derfor x_6 i basen med x_1 (pivoterer).
Altså skal vi Gauss-eliminere i simplex-tableauet på følgende måde (for at skaffe enhedsvektorer under x_1, x_4, x_5 og 0 i Z-rækken under x_1):

$$2 \cdot R4 \to R1, \ -R4 \to R2, \ -2 \cdot R4 \to R3.$$

Dette giver følgende nye simplex-tableau mht. til vores nye basis $B^2 = \{1, 4, 5\}$:

	B^2	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$R1$	Z	1	0	-1	2	0	0	2	2
$R2$	x_4	0	0	0	2	1	0	-1	2
$R3$	x_5	0	0	3	3	0	1	-2	5
$R4$	x_1	0	1	0	-1	0	0	1	1

I denne nye basis $B^2 = \{1, 4, 5\}$ er vores nye basisløsning

$$x^{B^2} = x^{B^1} + \delta^* \cdot d^1 = (1, 0, 0, 2, 5, 0).$$

I vores nye tableau ser vi nu, at vi har en negativ reduced cost ved x_2 ($r_2 = -1$), derfor kan vi foretage endnu en pivotering for at optimere vores løsning.
Vi opskriver så simplex-tableauet for (P) mht. B^2 som ligningssystem:

$$Z = -2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_6,$$

med

$$\begin{aligned} x^{B^2} &= (1, 0, 0, 2, 5, 0)^T, \\ d^2 &= (0, 1, 0, 0, -3, 0)^T, \\ d^3 &= (1, 0, 1, -2, -3, 0)^T, \\ d^6 &= (-1, 0, 0, 1, 2, 1)^T. \end{aligned}$$

Vi skal nu igen finde største δ^* blandt $\delta \geq 0$, så $x^{B^2} + \delta \cdot d^2 \geq 0$. Vi får ved hurtig udregning, at

$$\delta^* = \min \left\{ \frac{x_4^{B1}}{\bar{a}_{2,1}}, \frac{x_5^{B1}}{\bar{a}_{2,2}}, \frac{x_1^{B1}}{\bar{a}_{2,3}} \right\} = \min \left\{ \infty, \frac{5}{3}, \infty \right\} = \frac{5}{3}.$$

Altså er vores $\delta^* = \delta^{x_5} = \frac{5}{3}$, som desuden opfylder, at $x^{B2} + \delta^* \cdot d^2 \geq 0_6$. Vi udskifter derfor x_5 i basen med x_2 (pivoterer).
Altså skal vi Gauss-eliminere i simplex-tableauet på følgende måde (for at skaffe enhedsvektorer under x_1, x_2, x_4 og 0 i Z-rækken under x_2):

$$1/3 \cdot R3, \;\; R3 \to R1.$$

Dette giver følgende nye simplex-tableau mht. til vores nye basis $B^3 = \{1, 2, 4\}$:

B^3	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	0	3	**0**	**1/3**	**4/3**	11/3
x_4	0	0	0	2	1	0	−1	2
x_2	0	0	1	1	0	1/3	−2/3	**5/3**
x_1	0	1	0	−1	0	0	1	**1**

Vi ser nu, at vi i det nye tableau ingen negative reduced costs har, derfor kan vi ikke optimere vores løsning mere. Altså er basen $B^3 = \{1, 2, 4\}$ optimal med $x^{B^3} = (1, 5/3, 0, 2, 0, 0)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 5/3, 0)$ (jfr. de fede tal i RHS) og $W(1, 5/3, 0) = 11/3$. Vi kan altså nøjes med to pivoteringer for at finde den optimale løsning.

For at finde vores dual basic solution, noterer vi os, at vores optimale basis er $B^3 = \{1, 2, 4\}$, derfor kan vi i vores duale problem (D) lave de korresponderende uligheder om til ligheder og løse:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &= 2 \\ 3y_2 &= -1 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (0, 1/3, 4/3),$$

med $W(0, 1/3, 4/3) = 11/3$, altsammen som også kan aflæses i simplex-tableautet (de vandrette fede tal).

Opgave 2

(a)

Fase 1-problemet for (P) bliver som følger:

$$\text{Minimize } Z^t = \sum_{i=1}^{3} \left(t_i^+ + t_i^-\,\right) \quad (P')$$

$$\text{subject to}$$

$$\begin{bmatrix} 1\,3\,2\,1\,1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\,0\,2\,0\,0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5\,3\,8\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ t_1^+ \\ \vdots \\ t_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix},$$

med $x_i, t_j^+, t_j^- \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4,\ j = 1, 2, 3.$

(b)

Da alle tallene i konstantsøjlen c er ≥ 0, vælger vi vores første basis for fase 1-problemet til $B^1 = \{t_1^+, t_2^+, t_3^+\}$. Vi skal nu udregne reduced costs for ikke-basisvariablene, og til dette formål er vi nødt til først at opstille det duale problem til fase 1-problemet:

$$\text{Maximize } W^t = 12y_1 + 14y_2 + 50y_3 \quad (D')$$
$$\text{subject to}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Vi skal nu finde en initial dual basic solution y^{B^1} til (D'). Dette gøres ved at løse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (y_1, y_2, y_3)^T = (1, 1, 1)^T = y^{B^1}.$$

Desuden får vi brug for

$$A_{B^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B^1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu finde $r_j = c_j - (a_{\cdot j})^T y^{B^1},\ j \in N \backslash B^1$:

$$r_1 = 0 - (1\ 2\ 5) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 \quad ; \quad r_2 = 0 - (3\ 0\ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

$$r_3 = 0 - (2\ 2\ 8) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -12 \quad ; \quad r_4 = 0 - (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$r_{t_1^-} = 1 - (-1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad 2 = r_{t_2^-} = r_{t_3^-}.$$

Med $\bar{a}_{\cdot j}^{B^1} = \left(A_{B^1}^{-1}\right) a_{\cdot j} = a_{\cdot j}$, kan vi nu opstille simplex-tableauet for (P'):

	B^1	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1^+	t_1^-	t_2^+	t_2^-	t_3^+	t_3^-	RHS
$R1$	Z	1	8	6	12	1	0	-2	0	-2	0	-2	76
$R2$	t_1^+	0	1	3	2	1	1	-1	0	0	0	0	12
$R3$	t_2^+	0	2	0	2	0	0	0	1	-1	0	0	14
$R4$	t_3^+	0	5	3	8	0	0	0	0	0	1	-1	50

Vi ser nu, at x_3 har den største reduced cost, derfor vil vi forsøge at pivotere denne ind i basen. Vi skal så finde største δ^*, så $y^{B^1} + \delta^* \cdot d^{x_3} \geq 0_{10}$ med $d^{x_3} = (0, 0, 1, 0, -2, 0, -2, 0, -8, 0)^T$. Vi finder, at

$$\delta^* = \min\{6, 7, 25/4\} = 6,$$

altså vil det være mest fordelagtigt at pivotere x_3 ind i basen i stedet for t_1^+. Vi udfører derfor de fornødne rækkeoperationer på simplex-tableauet (jfr. fremgangsmåden fra Opgave 1):

$$1/2 \cdot R2,\ -12 \cdot R2 \to R1,\ -2 \cdot R2 \to R3,\ -8 \cdot R2 \to R4,$$

og får så følgende simplex-tableau mht. til vores nye basis og basisløsning, $B^2 = \left\{x_3, t_2^+, t_3^+\right\}$ og $y^{B^2} = y^{B^1} + \delta^* \cdot d^{x_3} = (0, 0, 6, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0)^T \geq 0_{10}$:

	B^2	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1^+	t_1^-	t_2^+	t_2^-	t_3^+	t_3^-	RHS
$R1$	Z	1	2	-12	0	-5	-6	4	0	-2	0	-2	4
$R2$	x_3	0	$1/2$	$3/2$	1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0	6
$R3$	t_2^+	0	1	-3	0	-1	-1	1	1	-1	0	0	2
$R4$	t_3^+	0	1	-9	0	-4	-4	4	0	0	1	-1	2

Vi ser nu, at x_1 har den største reduced cost, derfor vil vi forsøge at pivotere denne ind i basen. Vi skal så finde største δ^*, så $y^{B^2} + \delta^* \cdot d^{x_1} \geq 0_{10}$ med $d^{x_1} = (1, 0, -1/2, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0)^T$. Vi finder, at

$$\delta^* = \min\{12, 2, 2\} = 2,$$

altså vil det være mest fordelagtigt at *vælge* at pivotere x_1 ind i basen i stedet for t_3^+. Vi udfører derfor de fornødne rækkeoperationer på simplex-tableauet (jfr. fremgangsmåden fra Opgave 1):

$$-2 \cdot R4 \to R1,\ -1/2 \cdot R4 \to R2,\ -R4 \to R3,$$

og får så følgende simplex-tableau mht. til vores nye basis og basisløsning, $B^3 = \left\{x_1, x_3, t_2^+\right\}$ og $y^{B^3} = y^{B^2} + \delta^* \cdot d^{x_3} = (2, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \geq 0_{10}$:

	B^3	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1^+	t_1^-	t_2^+	t_2^-	t_3^+	t_3^-	RHS
$R1$	Z	1	0	6	0	3	2	-4	0	-2	-2	0	0
$R2$	x_3	0	0	6	1	$5/2$	$5/2$	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$1/2$	5
$R3$	t_2^+	0	0	6	0	3	3	-3	1	-1	-1	1	0
$R4$	x_1	0	1	-9	0	-4	-4	4	0	0	1	-1	2

Vi ser nu, at x_2 og x_4 har positive reduced costs, derfor *vælger* vi at pivotere x_4 ind i basen. Vi skal så finde største δ^*, så $y^{B^3} + \delta^* \cdot d^{x_4} \geq 0_{10}$ med $d^{x_4} = (4, 0, -5/2, 1, 0, 0, -3, 0, 0, 0)^T$. Vi finder, at

$$\delta^* = \min\{2, 0, (-1/2)\} = 0,$$

altså vil det være mest fordelagtigt at vælge at pivotere x_4 ind i basen i stedet for t_2^+. Vi udfører derfor de fornødne rækkeoperationer på simplex-tableauet (jfr. fremgangsmåden fra Opgave 1):

$$-R3 \to R1,\ 1/3 \cdot R3,\ 4 \cdot R3 \to R4,\ -5/2 \cdot R3 \to R2,$$

og får så følgende simplex-tableau mht. til vores nye basis og basisløsning, $B^4 = \{x_1, x_3, x_4\}$ og $y^{B^4} = y^{B^3} + \delta^* \cdot d^{x_4} = (2, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \geq 0_{10}$:

B^4	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1^+	t_1^-	t_2^+	t_2^-	t_3^+	t_3^-	RHS
Z	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0
x_3	0	0	1	1	0	0	0	5/6	$-5/6$	$-4/3$	1/6	5
x_4	0	0	2	0	1	1	-1	1/3	$-1/3$	$-1/3$	1/3	0
x_1	0	1	-1	0	0	0	0	4/3	$-4/3$	$-1/3$	4/3	2

Vi ser nu, at der ikke er flere positive reduced costs, altså kan vi ikke optimere vores fase 1-problem mere, og vores optimale fase 1-basis (som så bliver vores initiale (P)-basis), er $B^4 = \{x_1, x_3, x_4\}$.

(c)

I basen $B^4 = \{x_1, x_3, x_4\}$ for (P) er vores basisløsning $x^{B^4} = (2, 0, 5, 0) \geq 0_4$ med $Z(2, 0, 5, 0) = 2$. Dette giver simplex-tableauet:

B^4	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	1	0	9	0	0	2
x_1	0	1	3	0	0	2
x_3	0	0	0	1	0	5
x_4	0	0	3	0	1	0

Vi ser dog nu, at da reduced costs for x_2 er lig med 9, kan vi ikke optimere vores Z-værdi mere, altså er basen B^4 optimal med den optimale løsning $x^{B^4} = (2, 0, 5, 0)$, med $Z(2, 0, 5, 0) = 2$.

Vi opstiller nu det duale problem (D) for at finde vores optimale duale basic solution:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize } Z' &= 12y_1 + 14y_2 + 50y_3 \\
\text{subject to} & \\
y_1 + 2y_2 + 5y_3 &\geq 1 \\
3y_1 + 3y_3 &\geq -9 \\
2y_1 + 2y_2 + 8y_3 &\geq 0 \\
y_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Bemærk, at y_2 og y_3 er unbounded, altså kan leve på hele $\mathbb{R}$. Vi skal så sætte lighedstegn i ligning 1,3 og 4 og løse mht. y_2 og y_3 ($y_1 = 0$):

$$
\left.\begin{aligned} 2y_2 + 5y_3 = 1 \\ 2y_2 + 8y_3 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{array}\right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 1/2 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \hookrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right].
$$

Vores optimal dual basic solution bliver altså $(y_1, y_2, y_3) = (0, 4/3, -1/3)$ med $Z'(0, 4/3, -1/3) = 2$, som også passer med værdien fundet for det primale problem.