Operationsanalyse 1
Obligatorisk opgave 2

Anders "Bongo" Bjerg Pedersen

6. juni 2006

Opgave 1

(i)

Vi tilføjer først slack-variable til (P):

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize } Z &= 60x_1 + 10x_2 + 20x_3 \\
\text{subject to} & \\
3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 - x_2 + x_3 - x_5 &= -1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 - x_6 &= 1 \\
x_i \geq 0,\ i &= 1, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Og opskriver så det duale problem (D):

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize } W &= 2y_1 - y_2 + y_3 \\
\text{subject to} & \\
3y_1 + y_2 + y_3 &\leq 60 \\
y_1 - y_2 + 2y_3 &\leq 10 \\
y_1 + y_2 - y_3 &\leq 20 \\
y_1 &\geq 0 \\
y_2 &\geq 0 \\
y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Vi ser umiddelbart, at en dual feasible basis kunne være $B^1 = \{4, 5, 6\}$ (slack-variablene fra (P)). I denne er vores dual basic solution $y^{B^1} = (0, 0, 0)$, og vores basic solution til (P) bliver så $x^{B^1} = (0, 0, 0, -2, 1, -1)$, som er infeasible! Vi skulle så gerne bevæge os hen mod en feasible solution i stedet, når vi optimerer.

(ii)

Da $y^{B^1} = (0, 0, 0)$, er $s^{B^1} = (60, 10, 20, 0, 0, 0)$, dvs. B^1 er dual feasible iflg. Definition 2, Lecture 3. For at løse (P) med dual simplex opskriver vi vores simplextableau som i noterne, idet vi anvender koefficienterne fra (P) og ganger alle koefficienter med -1 (hvilket medfører, at vi får nogle negative RHS og enhedsvektorer under vores basisvektorer fra (D)):

	B^1	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
$R1$	Z	1	-60	-10	-20	0	0	0	0	
$R2$	x_4	0	-3	-1	-1	1	0	0	-2	$\leftarrow$
$R3$	x_5	0	-1	1	-1	0	1	0	1	
$R4$	x_6	0	-1	-2	1	0	0	1	-1	

Vi identificerer nu største negative RHS, som bliver den variabel, det bedst kan betale sig at tage ud af basis og ser, at dette er x_4 med -2. Vi skal så finde mindste δ^* som følgende:

$$\delta^* = \min\left\{-\frac{s_1^{B^1}}{\bar{a}_{1,1}}, -\frac{s_2^{B^1}}{\bar{a}_{1,2}}, -\frac{s_3^{B^1}}{\bar{a}_{1,3}}\right\} = \min\left\{-\frac{60}{-3}, -\frac{10}{-1}, -\frac{20}{-1}\right\} = 10,$$

dvs. vi pivoterer x_4 ud af basen og x_2 ind i stedet for og får så vores nye basis $B^2 = \{2,5,6\}$ med $y^{B^2} = (10,0,0)$, $x^{B^2} = (0,2,0,0,-1,3) \leq 0_6$. Vores nye simplextableau fremkommer så ved følgende rækkeoperationer, der udføres for at skaffe 0 og en enhedsvektor under x_2:

$$-1 \cdot R2,\ 10 \cdot R2 \to R1,\ -R2 \to R3, 2 \cdot R2 \to R4:$$

	B^2	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
$R1$	Z	1	-30	0	-10	-10	0	0	20	
$R2$	x_2	0	3	1	1	-1	0	0	2	
$R3$	x_5	0	-4	0	-2	1	1	0	-1	$\leftarrow$
$R4$	x_6	0	5	0	3	-2	0	1	3	

Vi identificerer nu største negative RHS, som bliver den variabel, det bedst kan betale sig at tage ud af basis og ser, at dette er x_5 med -1. Vi skal så finde mindste δ^* som følgende:

$$\delta^* = \min\left\{-\frac{s_1^{B^2}}{\bar{a}_{2,1}}, -\frac{s_2^{B^2}}{\bar{a}_{2,3}}\right\} = \min\left\{-\frac{30}{-4}, -\frac{10}{-2}\right\} = 5,$$

dvs. vi pivoterer x_5 ud af basen og x_3 ind i stedet for og får så vores nye basis $B^3 = \{2,3,6\}$ med $y^{B^3} = (15,5,0)$, $x^{B^3} = (0,3/2,1/2,0,0,3/2) \geq 0_6$. Vores nye simplextableau fremkommer så ved følgende rækkeoperationer, der udføres for at skaffe 0 og en enhedsvektor under x_3:

$$-1/2 \cdot R3,\ 10 \cdot R3 \to R1,\ -R3 \to R2, -3 \cdot R3 \to R4:$$

	B^3	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$R1$	Z	1	-10	0	0	-15	-5	0	25
$R2$	x_2	0	1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$3/2$
$R3$	x_3	0	2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
$R4$	x_6	0	-1	0	0	$-1/2$	$3/2$	1	$3/2$

Vi ser nu, at da vi ingen negative RHS har tilbage, er vores basis $B^3 = \{2,3,6\}$ optimal med $x^{B^3} = (0,3/2,1/2,0,0,3/2) \geq 0_6$, $y^{B^3} = (15,5,0)$ og $W(x^{B^3}) = Z(x^{B^3}) = 25$. Dette gælder både for (P) *og* (D), da løsningen er feasible for både (P) og (D) (jævnfør svag dualitet). (???)

(iii) Sensitivitetsanalyse

- Ændringer i right hand sides:

Vi anvender metoden fra noterne (Lecture 7, *Example 2*) og opstiller nogle nødvendige størrelser (mht. (P)):

$$A_{B^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B^3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & -1 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nu på ændringer på RHS en af gangen fra toppen ved at tilføje et δ (en vilkårlig ændring) til værdien i RHS og skal løse $\sum_{j \in B^3} a_{j}.x_j = b'$, hvor b' er de ændrede RHS, for at finde vores "nye"basic solution, som vi derefter skal tjekke, om stadig er feasible:

$\underline{\delta_{x_2}:}$ Vi regner:

$$A_{B^3} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} \delta_{x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2^{B^3} \\ x_3^{B^3} \\ x_6^{B^3} \end{pmatrix} = A_{B^3}^{-1} \cdot b + \delta_{x_2} A_{B^3}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2^{B^3} \\ x_3^{B^3} \\ x_6^{B^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \delta_{x_2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 + \delta_{x_2} 1/2 \\ 1/2 + \delta_{x_2} 1/2 \\ 3/2 + \delta_{x_2} 1/2 \end{pmatrix} \geq 0_3,$$

dvs. når $\delta_{x_2} \geq -1$ ($\delta_{x_2} \in [-1; \infty[$), er vores basis B^3 stadig optimal.

$\underline{\delta_{x_3}:}$ Samme fremgangsmåde (derfor viser vi blot resultatet):

$$\begin{pmatrix} x_2^{B^3} \\ x_3^{B^3} \\ x_6^{B^3} \end{pmatrix} = A_{B^3}^{-1} \cdot b + \delta_{x_3} A_{B^3}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 - \delta_{x_3} 1/2 \\ 1/2 + \delta_{x_3} 1/2 \\ 3/2 - \delta_{x_3} 3/2 \end{pmatrix} \geq 0_3,$$

dvs. når $-1 \leq \delta_{x_3} \leq 1$, er vores basis B^3 stadig optimal.

$\underline{\delta_{x_6}:}$ Igen samme fremgangsmåde:

$$\begin{pmatrix} x_2^{B^3} \\ x_3^{B^3} \\ x_6^{B^3} \end{pmatrix} = A_{B^3}^{-1} \cdot b + \delta_{x_6} A_{B^3}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 + 0 \\ 1/2 + 0 \\ 3/2 - \delta_{x_6} \end{pmatrix} \geq 0_3,$$

dvs. når $\delta_{x_6} \leq 3/2$ ($\delta_{x_2} \in]-\infty; 3/2]$), er vores basis B^3 stadig optimal.

- Ændringer i objektfunktionens koefficienter:

Vi skynder os her at bemærke, at objektfunktionens værdier i (P) svarer til RHS i (D), derfor kan vi uden videre anvende ovenstående på (D)'s RHS med følgende størrelser (hentet fra (D)):

$$\tilde{A}_{B^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A}_{B^3}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\delta_{y_2}:}$ Vi regner:

$$\tilde{A}_{B^3}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_6 \end{pmatrix} = c + \begin{pmatrix} \delta_{y_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_2^{B^3} \\ y_3^{B^3} \\ y_6^{B^3} \end{pmatrix} = \tilde{A}_{B^3}^{-1} \cdot c + \delta_{y_2}\tilde{A}_{B^3}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_2^{B^3} \\ y_3^{B^3} \\ y_6^{B^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110/3 \\ 70/3 \\ 20/3 \end{pmatrix} + \delta_{y_2}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110/3 + \delta_{y_2}2/3 \\ 70/3 + \delta_{y_2}1/3 \\ 20/3 - \delta_{y_2}1/3 \end{pmatrix} \geq 0_3,$$

dvs. når $-55 \leq \delta_{y_2} \leq 20$, er vores basis B^3 stadig optimal.

$\underline{\delta_{y_3}:}$ Samme fremgangsmåde (derfor viser vi blot resultatet):

$$\begin{pmatrix} y_2^{B^3} \\ y_3^{B^3} \\ y_6^{B^3} \end{pmatrix} = \tilde{A}_{B^3}^{-1} \cdot c + \delta_{y_3}\tilde{A}_{B^3}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110/3 - \delta_{y_3}1/3 \\ 70/3 + \delta_{y_3}1/3 \\ 20/3 + \delta_{y_3}2/3 \end{pmatrix} \geq 0_3,$$

dvs. når $-10 \leq \delta_{y_3} \leq 110$, er vores basis B^3 stadig optimal.

$\underline{\delta_{y_6}:}$ Igen samme fremgangsmåde:

$$\begin{pmatrix} y_2^{B^3} \\ y_3^{B^3} \\ y_6^{B^3} \end{pmatrix} = \tilde{A}_{B^3}^{-1} \cdot c + \delta_{y_6}\tilde{A}_{B^3}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110/3 + 0 \\ 70/3 + 0 \\ 20/3 + \delta_{y_6} \end{pmatrix} \geq 0_3,$$

dvs. når $\delta_{y_6} \geq -20/3$ ($\delta_{y_6} \in [-20/3; \infty[$), er vores basis B^3 stadig optimal.

- Ændringer i ikke-basiskoefficienter:

Vi følger igen et eksempel fra noterne (Lecture 7, *Example 3*), dog vil vi se generelt på ændringer i ikke-basisvariable én for én i stedet for en konkret ændring. Vi vil anvende følgende notation: Δ_j (ændring af objektfunktionskoefficient c_j for variabel j), $\delta_{i,j}$ (ændring af variabel j, koefficient i i søjlen $a_{\cdot\bar{j}}$). Altså skal vi jævnfør eksemplet opstille udtrykkene

$$\left(a_{\cdot\bar{j}} + \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \delta_{2,j} \\ \delta_{3,j} \end{pmatrix}\right) y^{B^3} \leq c_i + \Delta_j,\ j \in N = \{1, 4, 5\}.$$

Ud fra disse udtryk kan man så ændre en eller flere δ/Δ-variable (og sætte de andre til 0) og se, om udtrykket på venstresiden er mindre end eller lig højresiden. I bekræftende fald forbliver x^{B^3} optimal, i afkræftende fald kan det betale sig at skifte basis, hvorved løsningen kan optimeres.

$$\underline{x_1:} \quad \begin{pmatrix} 3 + \delta_{1,1} \\ 1 + \delta_{2,1} \\ 1 + \delta_{3,1} \end{pmatrix}(15, 5, 0) \leq 60 + \Delta_1 \Leftrightarrow 15\delta_{1,1} + 5\delta_{2,1} - \Delta_1 \leq 10.$$

$$\underline{x_4:} \quad \begin{pmatrix} -1 + \delta_{1,4} \\ 0 + \delta_{2,4} \\ 0 + \delta_{3,4} \end{pmatrix}(15, 5, 0) \leq 0 + \Delta_4 \Leftrightarrow 15\delta_{1,1} + 5\delta_{2,1} - \Delta_4 \leq 15.$$

$$\underline{x_5:} \quad \begin{pmatrix} -1+\delta_{1,5} \\ 0+\delta_{2,5} \\ 0+\delta_{3,5} \end{pmatrix} (15,5,0) \leq 0+\Delta_5 \Leftrightarrow 15\delta_{1,1}+5\delta_{2,1}-\Delta_5 \leq 15.$$

Opgave 2

(a)

Vi formulerer transportproblemet (P):

$$\text{Minimize } (61,72,45,55,66,\ldots,61,47)(x_{1,1},x_{1,2},\ldots,x_{3,5})^T = Z$$
$$\text{subject to}$$
$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ \vdots \\ x_{3,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 15 \\ 11 \\ 12 \\ 9 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix},$$

med $x_{i,j} \geq 0,\ i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,\ldots,5\}$.

Og dets duale (D):

$$\text{Maximize } (15,20,15,11,12,9,10,8)(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)^T = W$$
$$\text{subject to}$$
$$\begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 72 \\ 45 \\ 55 \\ 60 \\ 66 \\ \vdots \\ 61 \\ 47 \end{bmatrix},$$

med $u_i, v_j \geq 0,\ i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,\ldots,5\}$.

(b)

For at identificere en dual basic solution, anvender vi 'North-West'-reglen:

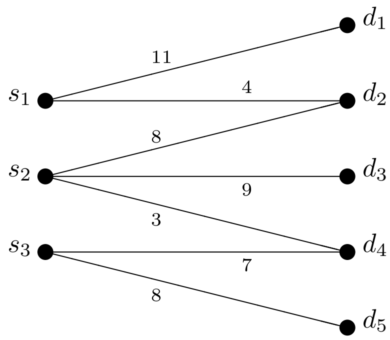
B^1	1	2	3	4	5	Supply:
1	11	4				15
2		8	9	3		20
3				7	8	15
Demand:	11	12	9	10	8	$Z = 3073$

Ud fra dette tableau får vi vores initiale basis og basic feasible solution:

$$\begin{aligned} B^1 &= \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5)\} \\ x^{B^1} &= (11,4,0,0,0,0,8,9,3,0,0,0,0,7,8). \end{aligned}$$

(c)

Nedenstående er en tegning af vores initiale basic solution (dens spanning tree):



Figur 1: Spanning tree hørende til initial basis B^1

(d)-(h)

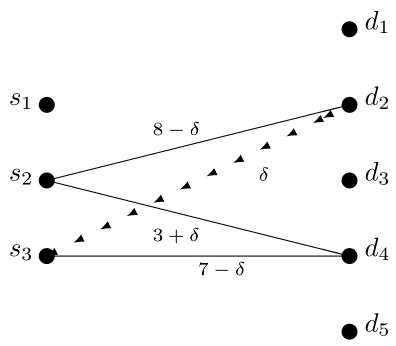
For at finde den tilhørende dual basic solution, sætter vi de korresponderende uligheder i det duale problem til ligheder, og eftersom det er et transportproblem, vi har med at gøre, kan vi sætte én af variablene til 0 og så løse mht. de andre. I vores tilfælde vælger vi $u_2 = 0$. Dette giver følgende ligninger:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 61 \\ u_1 + v_2 &= 72 \\ u_2 + v_2 &= 78 \\ u_2 + v_3 &= 60 \\ u_2 + v_4 &= 49 \\ u_3 + v_4 &= 61 \\ u_3 + v_5 &= 47 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u^{B^1} = (-6, 0, 12) \text{ og } v^{B^1} = (67, 78, 60, 49, 35).$$

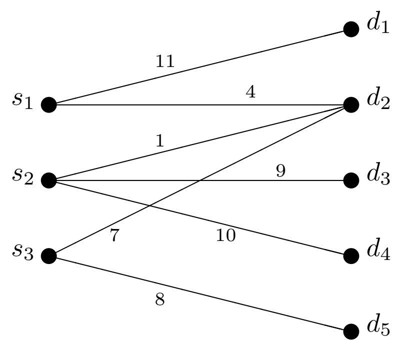
Vores reduced costs er givet ved $r_{i,j}^{B^1} = c_{i,j} - u_i^{B^1} - v_j^{B^1}$ og kan ses i tabellen nedenfor:

B^2	1	2	3	4	5	u_i
1	0	0	-9	12	37	-6
2	2	0	0	0	21	0
3	-20	**-24**	-9	0	0	12
v_j	67	78	60	49	35	

Vi ser nu, at variablen $x_{3,2}$ har største negative reduced cost (-24), altså tages denne ind i basis. For at finde ud af, hvilken vi skal have ud, tegner vi den cykel, der nu er opstået (se Figur 2):



Figur 2: Pivoteringscykel til B^1



Figur 3: Spanning tree til B^2

Vi ser nu, at for at få størst mulige $\delta \geq 0$, vælger vi $\delta = 7$ og sender variablen $x_{3,4}$ ud af basis. Med de rette opdateringer får vi vores nye basis B^2 og basic solution x^{B^2}:

$$\begin{aligned} B^2 &= \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,5)\} \\ x^{B^2} &= (11,4,0,0,0,0,1,9,10,0,0,7,0,0,8), \end{aligned}$$

som er illustreret i Figur 3, hvilket giver følgende tableau:

B^1	1	2	3	4	5	Supply:
1	11	4				15
2		1	9	10		20
3		7			8	15
Demand:	11	12	9	10	8	$Z = 2905$

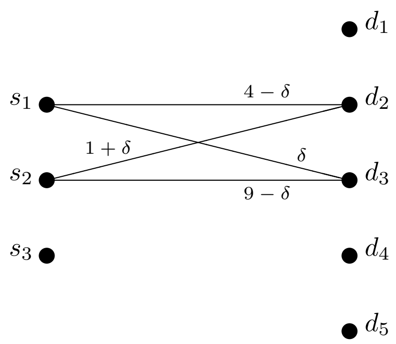
For at finde den tilhørende dual basic solution, sætter vi igen de korresponderende uligheder i det duale problem til ligheder, sætter én af variablene til 0 og løser mht. de andre. Vi vælger igen $u_2 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 61 \\ u_1 + v_2 &= 72 \\ u_2 + v_2 &= 78 \\ u_2 + v_3 &= 60 \\ u_2 + v_4 &= 49 \\ u_3 + v_2 &= 66 \\ u_3 + v_5 &= 47 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u^{B^2} = (-6, 0, -12) \text{ og } v^{B^2} = (67, 78, 60, 49, 59).$$

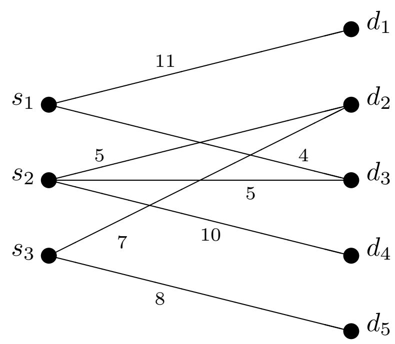
Vores reduced costs er givet ved $r_{i,j}^{B^2} = c_{i,j} - u_i^{B^2} - v_j^{B^2}$ og kan ses i tabellen nedenfor:

B^3	1	2	3	4	5	u_i
1	0	0	**-9**	12	13	-6
2	2	0	0	0	-3	0
3	4	0	15	24	0	-12
v_j	67	78	60	49	59	

Vi ser nu, at variablen $x_{1,3}$ har største negative reduced cost (-9), altså tages denne ind i basis. For at finde ud af, hvilken vi skal have ud, tegner vi den cykel, der nu er opstået (se Figur 4):



Figur 4: Pivoteringscykel til B^2



Figur 5: Spanning tree til B^3

Vi ser nu, at for at få størst mulige $\delta \geq 0$, vælger vi $\delta = 4$ og sender variablen $x_{1,2}$ ud af basis. Med de rette opdateringer får vi vores nye basis B^3 og basic solution x^{B^3}:

$$\begin{aligned} B^3 &= \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,5)\} \\ x^{B^3} &= (11,0,4,0,0,0,5,5,10,0,0,7,0,0,8), \end{aligned}$$

som er illustreret i Figur 5, hvilket giver følgende tableau:

B^3	1	2	3	4	5	Supply:
1	11		4			15
2		5	5	10		20
3		7			8	15
Demand:	11	12	9	10	8	$Z = 2869$

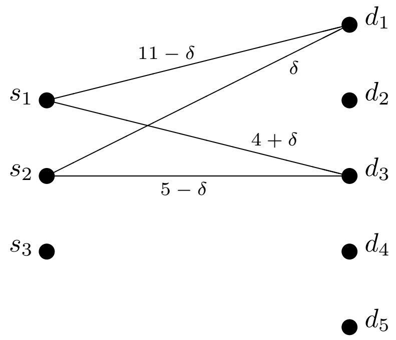
For at finde den tilhørende dual basic solution, sætter vi igen de korresponderende uligheder i det duale problem til ligheder, sætter én af variablene til 0 og løser mht. de andre. Vi vælger igen $u_2 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + v_1 = 61 \\ u_1 + v_3 = 45 \\ u_2 + v_2 = 78 \\ u_2 + v_3 = 60 \\ u_2 + v_4 = 49 \\ u_3 + v_2 = 66 \\ u_3 + v_5 = 47 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u^{B^3} = (-15, 0, -12) \text{ og } v^{B^3} = (76, 78, 60, 49, 59).$$

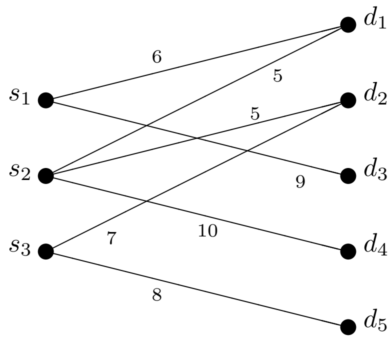
Vores reduced costs er givet ved $r_{i,j}^{B^3} = c_{i,j} - u_i^{B^3} - v_j^{B^3}$ og kan ses i tabellen nedenfor:

B^3	1	2	3	4	5	u_i
1	0	9	0	21	22	-15
2	**-7**	0	0	0	-3	0
3	-5	0	15	24	0	-12
v_j	76	78	60	49	59	

Vi ser nu, at variablen $x_{2,1}$ har største negative reduced cost (-7), altså tages denne ind i basis. For at finde ud af, hvilken vi skal have ud, tegner vi den cykel, der nu er opstået (se Figur 6):



Figur 6: Pivoteringscykel til B^3



Figur 7: Spanning tree til B^4

Vi ser nu, at for at få størst mulige $\delta \geq 0$, vælger vi $\delta = 5$ og sender variablen $x_{2,3}$ ud af basis. Med de rette opdateringer får vi vores nye basis B^4 og basic solution x^{B^4}:

$$
\begin{aligned}
B^4 &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,5)\} \\
x^{B^4} &= (6,0,9,0,0,5,5,0,10,0,0,7,0,0,8),
\end{aligned}
$$

som er illustreret i Figur 7, hvilket giver følgende tableau:

B^4	1	2	3	4	5	Supply:
1	6		9			15
2	5	5		10		20
3		7			8	15
Demand:	11	12	9	10	8	$Z = 2834$

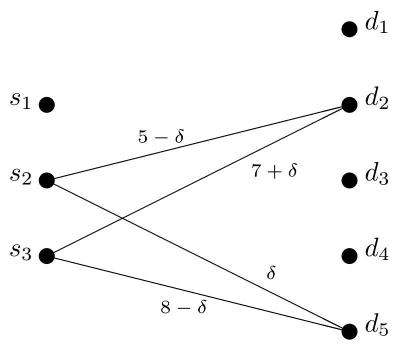
For at finde den tilhørende dual basic solution, sætter vi igen de korresponderende uligheder i det duale problem til ligheder, sætter én af variablene til 0 og løser mht. de andre. Vi vælger igen $u_2 = 0$:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 61 \\
u_1 + v_3 &= 45 \\
u_2 + v_2 &= 78 \\
u_2 + v_1 &= 69 \\
u_2 + v_4 &= 49 \\
u_3 + v_2 &= 66 \\
u_3 + v_5 &= 47
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \quad u^{B^4} = (-8, 0, -12) \text{ og } v^{B^4} = (69, 78, 53, 49, 59).
$$

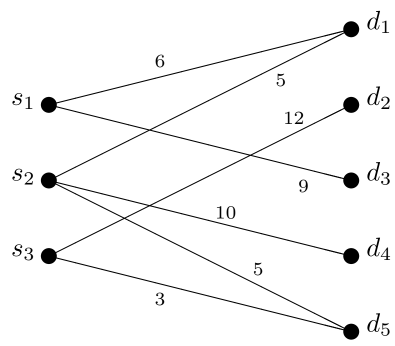
Vores reduced costs er givet ved $r_{i,j}^{B^4} = c_{i,j} - u_i^{B^4} - v_j^{B^4}$ og kan ses i tabellen nedenfor:

B^4	1	2	3	4	5	u_i
1	0	2	0	14	15	-8
2	0	0	7	0	**-3**	0
3	2	0	22	24	0	-12
v_j	69	78	53	49	59	

Vi ser nu, at variablen $x_{2,5}$ har største negative reduced cost (-3), altså tages denne ind i basis. For at finde ud af, hvilken vi skal have ud, tegner vi den cykel, der nu er opstået (se Figur 8):



Figur 8: Pivoteringscykel til B^4



Figur 9: Spanning tree til B^5

Vi ser nu, at for at få størst mulige $\delta \geq 0$, vælger vi $\delta = 5$ og sender variablen $x_{2,2}$ ud af basis. Med de rette opdateringer får vi vores nye basis B^5 og basic solution x^{B^5}:

$$\begin{aligned} B^5 &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,4),(2,5),(3,2),(3,5)\} \\ x^{B^5} &= (6,0,9,0,0,5,0,0,10,5,0,12,0,0,3), \end{aligned}$$

som er illustreret i Figur 9, hvilket giver følgende tableau:

B^5	1	2	3	4	5	Supply:
1	6		9			15
2	5			10	5	20
3		12			3	15
Demand:	11	12	9	10	8	$Z = 2819$

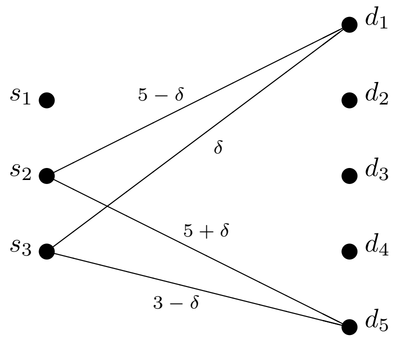
For at finde den tilhørende dual basic solution, sætter vi igen de korresponderende uligheder i det duale problem til ligheder, sætter én af variablene til 0 og løser mht. de andre. Vi vælger igen $u_2 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 61 \\ u_1 + v_3 &= 45 \\ u_2 + v_5 &= 56 \\ u_2 + v_1 &= 69 \\ u_2 + v_4 &= 49 \\ u_3 + v_2 &= 66 \\ u_3 + v_5 &= 47 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u^{B^5} = (-8, 0, -9) \text{ og } v^{B^5} = (69, 75, 53, 49, 56).$$

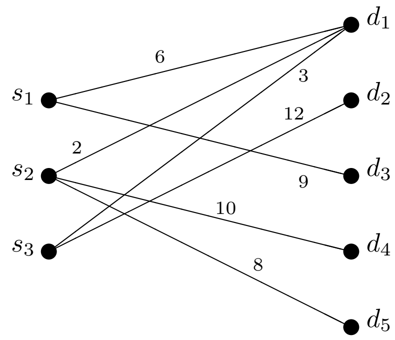
Vores reduced costs er givet ved $r_{i,j}^{B^5} = c_{i,j} - u_i^{B^5} - v_j^{B^5}$ og kan ses i tabellen nedenfor:

B^5	1	2	3	4	5	u_i
1	0	5	0	14	18	-8
2	0	3	7	0	0	0
3	**-1**	0	19	21	0	-9
v_j	69	75	53	49	56	

Vi ser nu, at variablen $x_{3,1}$ har største negative reduced cost (-1), altså tages denne ind i basis. For at finde ud af, hvilken vi skal have ud, tegner vi den cykel, der nu er opstået (se Figur 10):



Figur 10: Pivoteringscykel til B^5



Figur 11: Spanning tree til B^6

Vi ser nu, at for at få størst mulige $\delta \geq 0$, vælger vi $\delta = 3$ og sender variablen $x_{3,5}$ ud af basis. Med de rette opdateringer får vi vores nye basis B^6 og basic solution x^{B^6}:

$$\begin{aligned} B^6 &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2)\} \\ x^{B^6} &= (6,0,9,0,0,2,0,0,10,8,3,12,0,0,0), \end{aligned}$$

som er illustreret i Figur 11, hvilket giver følgende tableau:

B^6	1	2	3	4	5	Supply:
1	6		9			15
2	2			10	8	20
3	3	12				15
Demand:	11	12	9	10	8	$Z = 2816$

For at finde den tilhørende dual basic solution, sætter vi igen de korresponderende uligheder i det duale problem til ligheder, sætter én af variablene til 0 og løser mht. de andre. Vi vælger igen $u_2 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 61 \\ u_1 + v_3 &= 45 \\ u_2 + v_5 &= 56 \\ u_2 + v_1 &= 69 \\ u_2 + v_4 &= 49 \\ u_3 + v_2 &= 66 \\ u_3 + v_1 &= 59 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; u^{B^6} = (-8, 0, -10) \text{ og } v^{B^6} = (69, 76, 53, 49, 56).$$

Vores reduced costs er givet ved $r_{i,j}^{B^6} = c_{i,j} - u_i^{B^6} - v_j^{B^6}$ og kan ses i tabellen nedenfor:

B^6	1	2	3	4	5	u_i
1	0	4	0	14	18	-8
2	0	2	7	0	0	0
3	0	0	20	22	1	-10
v_j	69	76	53	49	56	

Vi ser nu, at da vi ingen negative reduced costs har tilbage, er B^6 optimal med optimal løsning x^{B^6} og $Z(x^{B^6}) = 2816$.