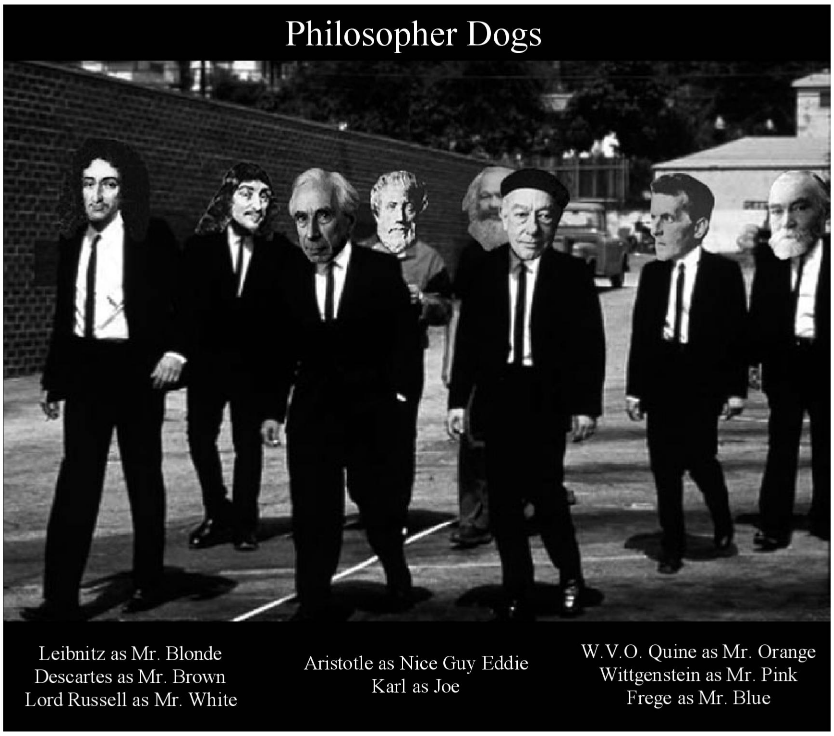
VtMat-projekt:
Bevisets stilling

Christian Mikkelsen Jensen, 060582
Lars Roholm, 110884
Anders Bjerg Pedersen, 070183

18. januar 2006



Christian Mikkelsen Jensen

Lars Roholm

Anders Bjerg Pedersen

Indhold

0.1 Indledning

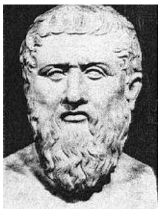
Vi vil i denne opgave se nærmere på tre klassiske skoler inden for matematikken - platonisme, intuitionisme og formalisme - og sætte dem op imod hinanden filosofisk og bevismæssigt. Derefter vil vi undersøge, hvordan moderne arbejdende matematikere forholder sig til matematikkens filosofi og specielt de tre skoler, og hvordan dette eventuelt afspejler sig i undervisningen af kommende matematikere.

Til sidst vil vi se på nogle 'diskutable' beviser og prøve at karakterisere dem som gyldige eller ugyldige. Sidst men ikke mindst vil vi forsøge at komme med vores egen holdning til, hvad et matematisk bevis bør bestå af.

1 De tre skoler

Der har igennem tiderne været mange opfattelser af, hvad et godt grundlag for matematikken bør bygge på. Vi vil i det følgende gennemgå tre af de vigtigste, nemlig platonisme, intuitionisme og formalisme.

1.1 Platonisme



Platonisme har sit navn efter den oldgræske filosof Platon (428-348 f.kr.). Platons forfatterskab består blandt andet af en række samtaler mellem forskellige personer, med Sokrates som den gennemgående figur. Platon skelner mellem to verdener; fænomenverdenen og idéverdenen. Ifølge Platon har sjælen eksisteret i idéverdenen før legemets fødsel. Det, vi oplever gennem vore sanser, er ting fra fænomenverdenen, det er ikke ægte og kun en refleksion af idéverdenen. Måden, man kan nå indsigt til idéverdenen, er, når man ved intuitiv tænkning, opnår en erkendelse, som man havde fra idéverdenen. Det at lære hos Platon er netop, at man gennem spørgsmål generindrer ting fra præeksistensen. Altså er al indlæring erindring fra eksistensen i idéverdenen. Måden at opnå indsigt i idéverdenen på er altså gennem tanker. [22]

Platon så læren om matematikken som måden til at opnå indsigt i idéverdenen, altså en form for bro imellem disse. Som eksempel kan nævnes rette linjer. Der findes ingen rette linjer uden bredde i fænomenverdenen, eller i hvert fald ikke nogen, som vi kan se. Disse findes ifølge platonismen i idéverdenen. Altså da de matematiske objekter eksisterer i idéverdenen, og idéverdenen har en realeksistens uafhængigt af os mennesker, eksisterer matematiske objekter uafhængig af os og vores kendskab til dem. Derudover er enhver sætning sand eller falsk uafhængig af matematikeren og tankegangen, om vi så kan afgøre det eller ej. Platonister opfatter viden om matematiske objekter som a priori, uafhængig af vores sanseerfaring. Platonister ser dog figurer som en visuel hjælp til vores erkendelse, men rent principielt er den uafhængig af sanseerfaring. [22]

Generelt kan vi karakterisere platonismen som ontologisk realisme, altså at de ser matematikken uafhængigt af den menneskelige bevidsthed. Uendelige mængder, fraktaler, alle matematiske objekter, er objekter med bestemte egenskaber. De eksisterer uden for tid og rum, det er ikke noget vi har konstrueret, og de vil heller ikke forsvinde. Ethvert spørgsmål om dem har et bestemt svar, uanset om det kan besvares eller ej. Ifølge platonismen er en matematikker ikke andet end en geolog, han kan ikke opfinde noget, da det allerede eksisterer, alt han kan gøre er at finde det [2], p318.

For Platon var et „bevis“ blot at få indsigt i det sande, altså skabe kontakt til præeksistensen. I *Menon* [9] beskrives, hvordan en slave ved hjælp af spørgsmål fra Sokrates kommer frem til nogle slutninger vedr. arealer.

Slaven har en intuitiv formodning om at for at fordoble arealet på et kvadrat, skal man fordoble hver af siderne. Ved hjælp af spørgsmål får Sokrates slaven til at indse, at han har taget fejl.

> "Sokrates: Tror du, at vi har gjort ham Fortræd ved at sætte ham i Forlægenhed og lamme ham som den elektriske Rokke?
> Menon: Nej, det synes jeg ikke
> Sokrates: Tværtimod, vi har aabenbart bragt ham paa Gled i den rigtige retning, henimod at finde Sammenhængen [...]
> Sokrates: Og disse Meninger er aabenbart for lidt siden dukket frem hos ham, dunkelt som en Drøm."
>
> \- *Menon*, [9], p267ff

Det, man forstår ved et matematisk bevis indenfor platonisme, stammer dog fra Euklid. Euklid, som muligvis selv var elev af Platon, samlede grækernes viden om matematik i et værk, hvor man ud fra aksiomer udledte sætninger. Dette er stadig, hvad en platonist vil forstå ved et bevis, aksiomerne er blot nogle andre. Den platonistiske bevispraksis går altså ud på at udlede sætninger ved hjælp af gyldige slutninger fra aksiomer, definitioner og tidligere viste sætninger.

Der opstod dog problemer med meget af det fundamentale i platonismen, nemlig at matematikken skulle være uafhængig af den menneskelige bevidsthed. I 1868 viste Eugenio Beltrami (1835-1900), at der fandtes en anden geometri end den euklidiske, som også er logisk konsistent, forudsat altså at den euklidiske er det [23]. Dette var et stort problem for platonisterne, da dette gjorde matematikken afhængig af den menneskelige bevidsthed. Hvordan kunne de hævde, at vi blot finder matematikken, når der nu var to udgaver af geometrien? Grunden, til at det var så stort et problem, var også, at geometrien var grundstenen i platonismen. Det var ud fra geometrien, Euklid havde lavet sine aksiomer, og det var også det gode eksempel på, at mennesket blot fandt matematikken. Dette gjorde ikke, at platonismen forsvandt, men derimod at en del af grundlaget for platonismen blev ændret. En af de mest kendte af nyere platonister er Kurt Gödel (1906-1978). Som en repræsentant for Gödels filosofi, har vi dette hyppigt brugte citat:

> "Despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e. in mathematical intuition, than in sense perception. [...] They, too, may represent an aspect of objective reality."
>
> \- Gödel, [2], p319

Gödel gjorde op med noget af det fundamentale i platonismen, nemlig omkring aksiomer og mængdelære. Tidligere havde argumentet, for at aksiomer var sande, været, at de var selvindlysende. Dette var ikke nødvendigt for Gödel, hvor aksiomer kunne accepteres på grundlag af deres konsekvenser. Derudover slog Gödel fast, at man må acceptere mængder. Hans argumentation bygger på to ting, dels en form for pragmatisme, da mængder kan forklare matematik, og så en intuition. Gödel var en ny type platonist, en moderne platonist. Han mente, at matematik kan ses som mængdelære, altså at al matematik kan oversættes til mængdelære. Grunden, til at man stadig vil kalde Gödel platonist, er, at han mente, at mængderne eksisterer i en idéverden, og måden for Gödel at opnå indsigt i idéverdenen var netop via intuitiv tænkning[1] [8], p16ff.

På trods af, at der ikke er mange matematikere, der i dag vil kaldes platonister, arbejder mange matematikere med den platonistiske filosofi, da denne giver en følelse af, at man arbejder med noget ægte. Man kan sige, at den arbejdende matematikker er platonist på hverdagene, når han arbejder med matematikken, men i weekenden, når matematikeren filosoferer over, hvad matematik er, vil han være alt andet end platonistisk.

1.2 Intuitionisme

Modsat logicismen, der ønskede at vise, at den klassiske matematik bygger på et logisk grundlag, opstod en (for nogen mere radikal) form for grundlag for matematikken omkring 1908, da L.E.J. Brouwer (1881-1966) lagde kimen til en ny retning indenfor matematisk grundlagstænkning, nemlig intuitionismen. Modsat logicisterne mente intuitionisterne, at den klassiske matematik var fyldt med fejl og burde ændres radikalt, måske endda genopbygges fuldstændigt. Gennem tiden havde mængdelæren vist sig modtagelig for flere paradokser: noget som logicisterne blot tilskrev dårlige matematikere, men som intuitionisterne i stedet tilskrev et forkert grundlag for matematikken som helhed. Logicisterne ønskede at finde fejlene og tilpasse dem, så teorierne stadig holdt inden for logikken. Intuitionisterne derimod ville anvende et helt andet grundlag. Logicisterne ville ligeledes definere matematik som en samling aksiomer, sætninger og definitioner, hvorimod intuitionisterne snarere ville definere den som tankevirksomhed, i klar modstrid med logicisternes definition. Hvor logicisterne lægger sig op af filosofien om realisme, lægger intuitionisterne sig op af filosofien om konceptualisme, altså at abstrakte entiteter kun eksisterer, hvis de er født af den menneskelige tankevirksomhed. [13], p189.

For en intuitionist består matematik kun af de objekter og teoremer, man ved tankens kraft kan *konstruere* sig frem til (’*to exist is to be constructed*’,

[1] Hvis man læser nogle af de tekster, Gödel ikke fandt egnet til udgivelse, vil han fremstå som knap så klar platonist.

[10], p180). Nogle senere intuitionister vil dog være uenige med Brouwer på dette punkt; for kan man i tankerne f.eks. konstruere noget, der er uendelig stort? Eller bare noget, der måske ikke er uendeligt men i hvert fald for stort til, at et enkelt menneske eller måske endda alle verdens matematikere kan overskue konstruktionen af det?[2]

Brouwer redegør for, at vi i vores sind har en god opfattelse af, hvad f.eks. tallet 1 er for en størrelse. Denne mentale opfattelse af tallet 1 kan gentages, hvorved vi får en ny mental opfattelse af tallet 2 osv. Brouwer er enig med Kant i, at mennesket også har en medfødt fornemmelse for begrebet tid. Tid er i det hele taget et meget vigtigt begreb for Brouwer, der nærmest bygger matematikkens grundlag på det. Tanken om at "fortsætte"noget vil altså ikke ligge et menneske fjernt. Det synes nogenlunde klart, at fortsætter man efter ovenstående metode, vil man kunne konstruere en vilkårligt lang *delmængde* af de velkendte naturlige tal; en intuitionist vil aldrig (i praksis) kunne konstruere hele mængden, men i teorien vil den kunne konstrueres. Alle tal følger induktivt af de foregående, og har man først konstrueret en mængde, er man så at sige "helt færdig"med den. Brouwer mener ligeledes, at disse tal (eller mere generelt 'momenter') flyder kontinuert, og at man derfor kan tale om noget 'mellem' momenterne.

Heraf følger nu pludselig de rationale og derefter de reelle tal. Og har vi nu dem, kan vi konstruere os frem til f.eks. det Cartesiske koordinatsystem i to, tre eller flere dimensioner (hhv. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^n$), og kalder vi nu et sæt af f.eks. to reelle tal for et 'koordinatsæt', har vi pludselig defineret et punkt, og nu kan geometrien begynde at udfolde sig. Sådan fortsætter intuitionisten med hele tiden at konstruere sig videre til mere avanceret og bredere spændende matematik. Intuitionisterne har rent faktisk kunnet konstruere talteori, algebra, mængdelære, analyse og så videre, men en stor del af de store og (i den klassiske matematikers øjne) vigtige sætninger mangler, da de for en intuitionist er meningsløse (ukonstruerbare). Dette er dog ikke det store problem for intuitionisterne, der som nævnt hellere vil konstruere sig frem til matematikken og så se, hvad der kommer ud af det. [10]

Alt det ovenstående virker umiddelbart meget tilforladeligt og acceptabelt, så hvor ligger de store forskelle så til de andre skoler inden for grundlagstænkningen? Det punkt, hvor Brouwer nok kaster sig i klinch med flest matematikere, er spørgmålet om, hvorvidt man bør acceptere det udelukkede tredjes princip, altså at der for alle propositioner (påstande) gælder, at enten er påstanden sand, eller også er den falsk, den kan ikke være en mellemting. Brouwer er af den holdning, at princippet falder tilbage på '*an incorrect and outdated philosophy of mathematics*' ([10], p179) og giver f.eks. i sin tekst om emnet eksempler, hvor han skyder flere af de store klassiske teoremer i sænk ved at komme med modeksempler, hvor man ikke kan afgøre, om en påstand er sand eller falsk. Brouwer er ligeledes uenig i udformningen af flere

[2] Se f.eks. afsnit 4.2 om fire-farve-sætningen.

typer 'uendeligt' store mængder, f.eks. 'mængden af kontinuerte funktioner af én variabel', da en intuitionist (eller en hvilken som helst anden person for den sags skyld!) aldrig ville blive færdig med konstruktionen af en sådan mængde. De enkelte elementer eksisterer klart, men vi kan ikke diskutere dem som en helhed eller mængde, intuitionistisk set. Der er yderligere problemer med f.eks. de Cauchyfølger, der ikke bygger på regler eller algoritmer, og såkaldte impredikative definitioner [3], som Brouwer ikke mener, man kan konstruere sig frem til, da argumentet vil blive cyklisk. Også det ellers så brugte faktum, at en dobbelt negation af et udsagn fjerner begge negationer, vil Brouwer ikke godtage.

Skal man altså som intuitionist bevise en matematisk påstand, må man konstruere sig frem. Selve den matematiske praksis i beviset er nogenlunde, som vi gør det i dag, men intuitionisten vil på nogle væsentlige punkter have færre redskaber til sin rådighed eller måske snarere flere ting, der ikke kan afgøres. Tænk på hvor mange ting i nutidens matematik, der ville blive dømt uafgørlige, hvis man skulle undvære det udelukkede tredjes princip eller begrebet supremum? Ting som indirekte beviser vil f.eks. ikke kunne bruges, da man her ikke har konstrueret sig frem til den påstand, man oprindeligt ønskede at vise. For Brouwer er det ligeledes helt udelukket, at matematiske teorier skulle kunne modbevises af empiriske data fra den virkelige verden. Matematik handler om, hvordan mennesket angriber den virkelige verden, ikke omvendt ([10], p175).

Men når nu intuitionisterne har konstrueret sig frem til så mange grene af matematikken, hvorfor er den så ikke blevet accepteret generelt af de mere klassiske matematikere? Snapper giver i sin artikel tre gode grunde til, at intuitionismen har slået fejl ([13], p188):

1. For det første nægter langt størstedelen af de klassiske matematikere at opgive mange af deres største og flotteste beviser, fordi de ikke lige passer ind i en intuitionists opfattelse af bevisførsel (altså at beviserne ikke er konstruerede).

2. For det andet er der problemer med de sætninger, som både kan bevises klassisk og intuitionistisk, men hvor det klassiske bevis er kort og smart, er det intuitionistiske langt og bøvlet. Den klassiske matematiker nægter igen her at tro på, at deres små smarte beviser ikke skulle "kunne gøre arbejdet".

3. For det tredje kommer intuitionismen med beviser, der ikke vil kunne holde i den klassiske matematik, og som derfor fremstår uforståelige for den klassiske matematiker.

Snapper bemærker dog, at der i alle ovenstående tre tilfælde er tale om emotionelle grunde. Den klassiske matematik har altså ikke umiddelbart

[3]Definitioner af objekter, der f.eks. hentyder til mængder, de selv ligger i; et eksempel er supremum - mindste øvre grænse - der er defineret vha. mængden af øvre grænser

kunnet finde f.eks. logiske modstride, der skulle give huller i teorien, de bekæmper snarere hinanden på ideologier i stedet for matematisk intuition eller stringens. De klassiske matematikeres store mængder af arbejde og deres overbevisning om selve matematikkens grundlag er altså årsagen til, at intuitionismen aldrig rigtig har fået fodslag.

1.3 Formalisme

Formalismen er den matematiske skole, der mener, at matematik bare består af symboler, regler for sammensætning af disse, et minimum af antagelser (eller aksiomer) samt nogle bestemte regler for, hvordan logiske slutninger drages. Formalisterne ønskede at udtrykke matematikken som rent formelle logiske systemer, hvor deres egentlige betydning eller funktion i den virkelige verden var underordnet. Formålet med formalismen var at udvikle en matematisk teknik man kunne bruge til at vise, at matematikken var konsistent. Skolen blev grundlagt omkring år 1910 af den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943) som konsekvens af den stigende usikkerhed, der var kommet blandt nogle af datidens matematikere omkring matematikkens logiske grundlag. Starten på dette skyldes den tyske logiker Gottlob Frege (1848-1925), der havde forsøgt at udlede alle aritmetikkens love kun ved hjælp af logik. Bertrand Russel (1872-1943) fandt imidlertid et paradoks i Freges system og viste hermed, at dette var inkonsistent. Paradokset blev senere kendt som Russels Paradoks. Russel og Alfred North Whitehead (1861-1947) lavede nu en revision af Freges arbejder og producerede det omfattende værk *Principia Mathematica*. Men selvom Russel og Whitehead påstod, at de havde undgået problemerne i Freges værk, var der mange matematikere, der mente, at de havde gjort for store undtagelser for at komme uden om paradokserne. [19]

Som en af de førende matematikere for sin tid så Hilbert det som sin pligt at forsvare matematikken imod angreb fra filosoffer og andre skeptikere. Det var her, Hilbert grundlagde sit projekt; "Hilbert's Program", der altså var begyndelsen på formalismen.

Det mest sårbare punkt for matematikken var uendeligheder, og Hilbert ville derfor retfærdiggøre brugen heraf. Hans program skulle bestå af tre trin:

Trin 1 Første trin i Hilbert's Program bestod i at isolere og kategorisere den endelige og derfor uproblematiske del af matematikken. Netop denne del var ikke modtagelig overfor angreb fra filosoffer og havde ikke brug for nogen form for revidering. [11], p3ff.

Trin 2 Andet trin i Hilberts program var at rekonstruere den uendelige del af matematikken til et gennemarbejdet formelt system. Dette store system bestod af en masse uendelige mængder og funktioner imellem disse, navnligt funktioner fra de naturlige tal ind i sig selv. Formlerne i det store system bestod af samlinger af symboler, der i sig selv er uden betydning, men som kan manipuleres i henhold til lovene om logiske slutnigner i den endelige del af matematikken. [11], p3ff. Hilberts program skulle gøre matematisk bevisførsel til en slags spil; et spil med meget stramme regler og helt specielt udstyr. Det udstyr, der skal bruges ved spillet, er de matematiske symboler, omend ikke deres mening i den virkelige verden men blot deres mening i sammenhængen med andre symboler. Spillets regler er lovene om logiske slutninger inden for det pågældende aksiomatiske system. I Hilberts formalisme handler matematik altså ikke om det, symbolerne står for, men om symbolerne selv. Det er selve bevisprocessen, der er vigtig for en formalist.

Mange beskriver Hilbert som instrumentalist, idet en ideel påstand, som Hilbert udtrykker det, "ikke har nogen mening i sig selv". En sætning er ifølge Hilbert sand, hvis den kan udledes ud fra systemets aksiomer kun ved hjælp af gyldige logiske slutninger.

Målet var ikke at gøre matematik til et meningsløst spil, men at gøre matematik til en teoretisk videnskab, der gør den videnskabelige matematiske praksis til et formelt sprog. [17]. Hvert system er sit eget spil med sit eget regelsæt. Hilbert siger blandt andet:

> "This formula game is carried out according to certain definite rules, in which the technique of our thinking is expressed. [...] The fundamental idea of my proof theory is none other than to describe the activity of our understanding, to make a protocol of the rules according to which our thinking actually proceeds."
>
> - David Hilbert, 1928, [17], afsnit 3.

Trin 3 Det sidste trin bestod i at give et bevis for konsistensen af det store system, som var gyldigt i henhold til den endelige del af matematikken. Hvis man opnåede det, ville man have vist, at alle påstande, der kan bevises inden for det store system, også ville være sande inden for den endelige del af matematikken. Dette var netop hovedmålet med formalismen. Man ville da kunne benytte objekterne fra det store system til at bevise påstande om endelige objekter. [11], p3ff.

Et matematisk system skulle ifølge Hilbert være fuldkomment, uafhængigt og konsistent. Han udtrykte:

> "Every science takes its starting point from a sufficiently coherent body of facts is given. It takes form however, only by *organizing* this body of facts. The organization takes place through the *axiomatic method*, i.e., one constructs a *logical structure of concepts* so that the relationships between the concepts correspond to relationships between the facts to be organized.
>
> There is arbitrariness in the construction of such a structure of concepts; we, however, *demand* of it:

1) Completeness, 2) Independence, 3) Consistency."

- David Hilbert, 1902, [18], p3ø.

Dette blev dog skudt i sænk af logikeren Kurt Gödel (1906-1978), da han puplicerede en artikel, hvor han viste, at ethvert formelt system, som indeholder de naturlige tal, ikke både kan være fuldstændigt og konsistent. Dette blev enden på Hilberts program.

Dette på trods er formalisme idag langt mere kendt end både logik og intuitionisme, hvilket blandt andet skyldes brugen af den formaliserede matematik inden for datalogien. Selvom formalismen viste sig uegnet til filosofisk brug inden for matematikken, endte dens indflydelse altså ikke ved Gödels puplicering i 1931. Den britiske logiker Alan Turing (1912-1954) tog ideen om en formaliseret, mekanisk beregningsproces til sig, hvilket blev grundlaget for hvor tids digitale computere. Turing fremsatte ideen om en maskine, der kunne programmeres til at lave de samme udregninger, som et menneske ville kunne udføre med en blyant og et stykke papir. Vor tids computerprogrammer er skrevet i formelle sprog, hvilket Hilberts idé om at formalisere matematikken har en stor del af æren for. Gödel viste godt nok, at Hilberts idé ikke var brugbar som grundlag for matematikken, men set i lyset af den digitale revolution må man sige, at formalismen på ingen måde var spild af tid. [19], p2.

2 Uoverensstemmelser mellem teori og praksis

Der er tilsyneladende ikke den store sammenhæng mellem den matematiske praksis og de filosofiske skolers opfattelse. Rent filosofisk ville langt de fleste matematikere kalde sig formalister, hvis de skulle stilles til regnskab for deres holdning. Men hvordan kan det være, at matematikken overhovedet kan anvendes? Det er jo noget, vi selv har konstrueret af ren logisk karakter. Som nævnt er bevisbyrden også kompliceret. Dette gør, at mange har en mere platonistisk opfattelse, når de arbejder med matematikken. Dieudonné beskriver det således:

> "On foundation we believe in the reality of mathematics, but of course when philosophers attack us with their paradoxes we rush to hide behind formalism and say, 'Mathematics is just a combination of meaningless symbols', and then we bring out chapter 1 and 2 on set theory. Finally we are left in peace to go back to our mathematics and do as we have always done, with the feeling each mathematician has that he is working with something real. This sensation is probably an illusion, but is very convenient."

- Dieudonné, 1970, [12], p54f

Der er altså stor forskel på den matematiske praksis og filosofien, men hvilke konsekvenser bør det have? Ud fra et filosofisk synspunkt ville argumentet nok være, at hvis vi kalder os formalister, så skal den matematiske praksis også afspejle det. Man kunne også finde en ny filosofi, som passer til teorien, altså endnu en gang at prøve at finde et fundament for matematikken. Vi mener, det er en ny filosofi, der er brug for. Dette åbner dog et nyt spørgsmål: hvad skal der til, for at vi ændrer vores praksis? Tidligere har det, at man har fundet paradokser, primært ændret i den filosofiske holdning, ikke på den matematiske praksis. Selvom det f.eks. ikke er vist, at man altid kan fjerne en dobbelt negation, så er det almindelig praksis, og først hvis det giver noget forkert i en konkret situation, vil det blive taget alvorligt. Vi mener, dette også gælder den matematiske praksis som helhed; først hvis det bliver vist, at det vi gør, giver en modstrid (og ikke bare en tænkt modstrid men en klar og tydelig modstrid), vil praksisen blive ændret. Og det er ikke engang sikkert, det kommer an på alternativet. Hvis alternativet er noget, der ikke fungerer i praksis, så vil vi blot lave nogle ændringer, så det fungerer. Så selvom det ikke har kunnet lade sig gøre at vise, at den matematiske praksis har sin berettigelse, så tror vi først, at en ny praksis vil kunne blive aktuel, hvis den er praktisk lige så anvendelig som den gamle. Og dette vil igen komme til at tage tid, men hvis man kan vise, at den er nogenlunde filosofisk "skudsikker", og den samtidig vil kunne virke bedre på nogen områder, så tror vi, matematikere med tiden vil skifte, og på sigt vil den nuværende praksis uddø.

2.1 Matematisk bevis

I det foregående har vi fokuseret på det filosofiske i et matematisk bevis, alternativt kunne man også prøve at beskrive processen i den matematiske praksis, og hvad et matematisk bevis er. Dette gør Imre Lakatos (1922-1974) i 'Proofs and Refutations' [6]. Lakatos bruger et konkret eksempel, Eulers Polyedersætning, som en skoleklasse arbejder med. Lakatos beskriver, hvordan man først gætter formlen, så laver man et bevis, så finder man nogle modeksempler, modificerer beviset, finder nye modeksempler osv. Lakatos skelner imellem to typer af modeksempler: et lokalt modeksempel og et globalt. Et lokalt modeksempel er et eksempel imod beviset, mens et globalt modeksempel går imod selve sætningen. Ved et lokalt modeksempel må beviset ændres, lemmaer udskiftes og skjulte lemmaer formuleres. Ved et globalt modeksempel skal selve sætningen ændres, eller i værste fald forkastes. Man skal altså kunne finde lokale modeksempler, beviset skal dermed kunne 'angribes'. Dette giver en hel anderledes dynamisk fremstilling af et matematisk bevis, end f.eks. formalisterne. Dette passer også godt med den umiddelbare fornemmelse af, at matematikken udvikler sig. Ifølge Lakatos skal man for ethvert bevis kunne finde modeksempler, hvis de findes, da det er det, der sikrer gyldigheden af beviset, og jo flere steder beviset potentielt kan falsificeres jo bedre.

Dette billede passer bedre på, hvordan matematikeren faktisk arbejder;

han finder noget, der kunne ligne en sammenhæng, og så arbejder han ellers derfra. Og ikke som formalisterne beskriver det, hvor man arbejder fra aksiomer, og ud fra dem fremkommer så sætningen. Man kan sige, der er byttet om på rækkefølgen, altså først sætningen og så vejen ned til aksiomerne. Dette har Thomas Tymoczko også et bud på i form af 3 kriterier, som han mener, karakteriserer et matematisk bevis [16]:

1. Beviser er overbevisende
2. Beviser er inspicerbare
3. Beviser er formaliserbare

Med overbevisende mener han, at en vilkårlig matematiker kan blive overbevist om gyldigheden af beviset. Med inspicerbarheden menes der, at enhver kyndig matematiker skal kunne kigge dem efter og bekræfte deres gyldighed. Derudover skal et bevis være anskueligt, og det skal være muligt at kontrollere i hånden. Matematikere opsætter beviserne med lemmaer, så beviset bliver mere gennemskueligt. Derudover er beviser a priori. Med formaliserbare menes der, at beviser er defineret indenfor et formelt sprog og kan udledes ved hjælp af aksiomer og logiske slutninger. Et bevis, der opfylder disse 3 krav, er et matematisk bevis, men hvad hvis enkelte punkter ikke er opfyldt? Det vil vi se nærmere på senere ved nogle forskellige eksempler på "diskutable" beviser.

3 Et eksempel fra hverdagens matematik

For at komme lidt væk fra filosofiske betragtninger og andre verdensfjerne ting vil vi nu betragte et eksempel fra et kursus, alle matematikere på den nye ordning skal igennem, nemlig førsteårskurset Matematisk Metode. På kursets hjemmeside står blandt andet følgende:

> **Kompetencebeskrivelse:**
> Ved kursets afslutning skal den studerende kunne:
>
> 1. Analysere et stykke matematik inklusive beviserne.
> 2. Selv lave beviser for sætninger i stil med dem, der optræder i MatIntro, LinAlg og MatM.
> 3. Kommunikere om et matematisk emne samt begynde at stille spørgsmål om matematikkens væsen og grundlag (f.eks i forbindelse med konstruktionen af de reelle tal).

Her er specielt punkt 3 interessant, og vi syntes, det kunne være spændende at høre underviserens holdninger og tanker med dette kursus. Derfor foretog vi et interview med professor Ian Kiming, der afholder kurset for andet år i træk om hans målsætning med et kursus, der skal lære nye spirende matematikere bevisteknikker fra grunden. Ligger der måske en af de ovennævnte skolers filosofi bag kursets håndværksmæssige tilgang? Vi stillede 10 spørgsmål til professoren om hans holdninger til emnet.

Først spørger vi ham direkte, hvad han mener, den overordnede mening med kurset er. Kiming svarer, at det er et rent praktisk kursus, der er opstået som en konsekvens af "den totale annihilering af bevismetoder i gymnasiet". Kurset skal ses som et kursus, der "fylder dette hul ud"og som en absolut nødvendighed for at få noget som helst ud af efterfølgende matematikkurser. Man kan altså ikke bare antage, folk kan sådanne ting, når de starter på matematik.

Efterfølgende kommenterer Kiming nu på, om kurset mon afholdes i en bestemt skoles ånd:

> "Nej, jeg mener ikke, der er nogen bestemt ånd. Problemerne, der bliver belyst i kurset, er af ganske elementær art, og hvis man blandede filosofi ind i det, ville 50% af eleverne falde fra. [...] Problemerne i kurset er lige så kontante som at lære lineær algebra, filosofien kan komme senere!"

Der bør altså ikke diskuteres filosofi på så tidligt et stadium i en matematikers indlæring, da det vil medføre frafald. På spørgsmålet om, hvorvidt man ikke starter forholdsvist logicistisk ud på kurset med at diskutere grundlæggende logik og slutninger, svarer Kiming, at man er nødt til at starte med logik, slutninger og udsagn for overhovedet at kunne tale om et bevis. Der er mere tale om en tilvænningssag og at få slået fast, hvad vi egentlig mener, når vi siger, at noget "medfører"noget andet. Nu spørges der til, hvorvidt man i kurset bør præsenteres kort for de forskellige skolers bevismetoder og de forskellige holdninger til eksempelvis gyldigheden af at fjerne en dobbelt negation:

> "En sådan tilgang ville medføre et totalt crash for de fleste ved f.eks. at antyde, at nogen ikke vil have dobbelt negation. Det ville være absolut gift for deltagerne. Et eventuelt ekstrakursus løbende ved siden af med mere filosofiske spørgsmål ville være naturligt, det havde man også før i tiden, men på selve kurset absolut nej, grundet det foregående og det tidspres, der i forvejen er på kurset. I starten skal vi videre i teksten, der er tale om et 'håndværkskursus'. [...] Man skal kunne holde en hammer i hånden og slå et søm i. Derefter kan man spørge: 'Hvad er egentlig en hammer?'. Filosoferer man over det før man kan holde på den, ja så..."

Her er igen et udtryk for Kimings håndværksmæssige tilgang til matematikken, en skubben filosofien på afstand, i hvert fald i begyndelsen for at give plads til "at komme videre i teksten". Men hvilken skole tilhører Kiming så selv, om nogen? Til dette spørgsmål svarer han:

> "Ikke rigtig nogen, men jeg har en meget fast mening om, hvad matematik er. Hvis jeg *skulle* lægge mig op ad en bestemt skole, ville det nok blive formalismen. Men så alligevel ikke. Jeg er ikke tilfreds med det synspunkt, at matematikken er rent formalistisk. En maskine kunne i princippet tjekke slutningsreglers korrekthed. Matematikken er, hvad den er, hvordan kan man overhovedet debattere det? [...] Diskussionen om udvalgsaxiomet er tåbelig, man kan acceptere det eller ej, ingen kan tvinge én til det ene eller det andet; så har man bare et andet aksiomatisk system. For mig er det fuldstændig klart, at det formalistiske synspunkt kommer tættest på virkeligheden. Jeg tilhører en f-jerde skole: den beregningsbaserede matematik. Der er to aspekter i matematikken - beviser og slutninger - og så er der beregninger. Beregningerne er de mest fundamentale. Teorier, beviser og sætninger har kun en eksistensberettigelse, fordi de forsøger at hjælpe os til at lave beregninger. Det er et fundamentalt andet synspunkt end at starte med teorierne og efterfølgende bruge dem til beregningerne."

Her kommer Kiming med en efter vores mening ret præcis karakterisering af den moderne matematiker: han beskæftiger sig ikke med et problem, med mindre han kan "bruge det til noget". Der er ingen, der vil interessere sig for en sætning eller et teorem, der ikke giver mulighed for beregninger i en eller anden form. Sætningen ville simpelthen være ubrugelig! Kiming er altså klart tilhænger af sin egen pragmatiske skole, der helst kun beskæftiger sig med såkaldt "brugbare"ting. Man kan så være enig eller ej med Kimings synspunkter, men det må dog stå som et faktum, at man fra begyndelsen har anvendt en kombination af begge holdninger; altså at man til dels har løst problemer, man efterhånden er kommet ud for og til dels har undersøgt nye mere brogede jagtmarker, som man ikke umiddelbart har vidst, hvad ville føre med sig i fremtiden.

Man kan let se perspektiverne til nutidens problemstillinger med f.eks. militær forskning og modus I- kontra modus II-forksning (eller det berygtede slag mellem de relevante punkter i CUDOS- og PLACE-problematikken). I den forbindelse mener vi, det er mindst lige så vigtigt at opretholde grundforskningen i dens rene form, uden altid at tænke på, om man vil kunne anvende den i praksis. Vi er endnu ikke i stand til at kunne afgøre, om en ny gren inden for f.eks. fysikken ikke vil føre til eksempelvis en ny kraftfuld energikilde, men derfor bør vi vel ikke bare opgive denne nye gren? Lad os i stedet forske i den og finde dens muligheder. En meget stor del af de vigtige opdagelser gennem tiden er jo også fremkommet ud fra eksperimenter, der overhovedet ikke havde noget med sagen at gøre. Altså er der efter vores mening ingen grund til at fravælge en søgen, bare fordi man ikke har et specifikt mål. Og en matematisk sætning, der er udledt fra gyldige logiske slutninger, bliver jo ikke forkert, bare fordi den ikke umiddelbart kan bruges til noget. Måske vil man engang i fremtiden kunne bruge den til noget...

Kiming fortsætter lidt endnu med at slå sit synspunkt fast:

> "Teorierne er vores slaver; de skal kunne tjene beregningsformålet, ellers er de uinteressante. Udvalgsaksiomet og kontinuumshypotesen er uinteressante i denne forstand. Jeg er sikker på, der er mange, der ser det på samme måde. Der er en ægte substans i matematikken - beregningerne - som går ud over bare at se på nogle smukke symboler. De er konkrete ting, nærmest eksperimentelle. [...] De tre skoler er forældede, de er det 20. århundredes teorier. Denne nye skole giver en ret kontant styring af matematikkens udvikling, en frasortering af uvæsentlige problemer. Beregningstilgangen giver et fingerpeg om dette. Formalister ville have lavet alle teorier ligeberettigede."

Altså vil nutidens matematik læne sig mest op af formalismen men vedkende sig den empiriske og eksperimentelle del af matematikken, altså med andre ord dens forbindelse til omverdenen. De tre gennemgåede skoler ville nok være lidt skeptiske overfor Kimings nye "skole". Han lægger sig selv tættest op af formalismen, hvilket måske nok vil være mest nærliggende rent teknisk, men hvor formalisterne ikke bekymrer sig så meget om anvendelsen men mere "roder rundt"med en masse matematiske brikker, så ønsker Kiming at forske i brugbare teoremer, mens en formalist vil se mere generelt på teoremet i sig selv.

Men hvad så med f.eks. intuitionisternes forsøg på at skabe et nyt matematisk grundlag ved eksempelvis at argumentere mod dobbelt negation. Hvilken betydning bør dette tillægges, om nogen?

> "Diskussionen er mere filosofisk. Det er ikke noget uvæsentligt spørgsmål, men jeg er ikke sikker på, om det overhovedet har nogen betydning. Udfordringen er for dem, der påstår, det har en betydning. Giv mig et kontant eksempel på, at det gør en forskel. Jeg forstår diskussionerne og den anderledes matematik, vi ville få uden f.eks. dobbelt negation. Ikke kun de formelle systemer men også logikken er på spil, men der er tale om to forskellige aksiomatiske systemer, der må vurderes på baggrund af deres anvendelighed inden for beregninger. Hvis Brouwer-synspunktet har en fordel, så kom med den; hvis ikke må det forblive filosofi. Den kontante binding til falsificerbare beregningsmæssige forudsigelser er en måde at få stoppet diskussionen inden for matematikken. Inden for filosofien må de for min skyld gerne fortsætte de næste 500 år, men jeg anser det ikke for at være et matematisk problem. [...] Jeg tror ikke på, der kommer en beregningsmæssig forudsigelse, hvor intuitionisterne kommer med en korrekt tolkning og beregningsmatematikerne kommer med en forkert."

Skal nutidens matematikere overbevises om en ny filosofi, må man ifølge Kiming altså bevise, at den giver nogle væsentlige fordele i beregningerne, som man ikke havde adgang til med den foregående. Ligeledes viser Kiming sin store tiltro til det nuværende grundlag for matematikken, og der vil skulle meget til for at få ham til at skifte mening. Noget, som efter vores mening er vidt udbredt i den matematiske verden, specielt blandt de klassiske matematikere.

Til sidst præsenteres Kiming så for det filosofiske spørgsmål, om han mener, matematik er noget, vi finder på, eller noget vi opdager. Han svarer:

> "Filosoffer vil fortælle en, at der ikke er nogen forskel. Det er umuligt at specificere forskellen på at opdage og konstruere, det fører én ud i en vildfarelse pga. sproget. [...] Martin Gardner sagde engang: '2+2=4, også for dinosaurerne'. Jeg ved ikke, hvad det skulle betyde. For eksempel kan ens evne til at tælle forsvinde ved en hjerneskade. Det kan ikke være noget, der svæver oppe i skyerne. Måske bundet til nogle hjernestrukturer eller en forbindelse med evolution. Hjernen har at gøre med evolution. Hvordan vi forstår matematik, har meget med dette at gøre. Hvis matematikken eksisterede i forvejen, har man koblet alle de ting fra. Matematikken, som vi dyrker den, har en masse med den måde, hvorpå vores hjerne er struktureret, at gøre."

Her er altså en knap så sort/hvid holdning til spørgsmålet. Hvor filosofferne helst vil have os til at vælge en lejr, vil Kiming hellere lade spørgsmålet være op til dem, men han mener ikke, at der kan være tale om en slags platonistisk drømmeverden, hvor objekterne "bare"eksisterer. De er tværtimod stærkt afhængige af den menneskelige hjerne og dennes evolution op gennem tiderne. At matematikken så passer fornemt ind med vores omverden er en bekræftelse på, at vi mennesker er på rette spor. Her har Kiming til dels sat sig selv ind under naturalismen og gjort selve matematikken til (i grove træk) et slags tankespind.

På en måde kan man sagtens følge argumentet: i tidernes morgen var vores hjerner knap så udviklede, for ikke at sige overhovedet ikke udviklede. Men op gennem tiderne har mennesket været genstand for evolution, måske endda den mest omfattende og hurtigste evolution nogensinde. Dengang kunne vi knap lægge to tal sammen, men eftersom evolutionen tog fat i os, udviklede vores hjerner sig i takt med den, og vi blev i stand til at udføre mere og mere komplekse ting, heriblandt også at udvikle videnskaberne og specielt matematikken. I dag kan vi udrette de mest utrolige ting med videnskaben, men det store spørgsmål er selvfølgelig, om det bare er sådan, tingene nu engang er, og at vi mennesker bare er en slags opdagere, hvis evner til at opdage følger vores hjerners udvikling, eller er vi simpelthen bare blevet bedre til at "finde på"med tiden? Havde vi svaret, sad vi nok ikke her, men Kiming ville klart tilslutte sig den første mere "platonistiske"holdning til emnet dog uden på nogen måde at være platonist.

Ville almindelige matematikere mon så tilslutte sig Kimings "beregningsskole"?

> "Ikke alle. Der er så mange skøre personligheder, og ikke alle vil jo høre på fornuft... De fleste er rimelig kontante i deres måde at tænke på, har en fornemmelse for gode og dårlige sætninger; jo mere falsificerbar, jo bedre. Eksempelvis klassifikationen af endelige simple grupper, fire-farve-sætningen og Fermats sidste sætning er alle falsificerbare, hvilket gør dem store; de har et indhold af kontant substans. [...] Mange er ikke interesserede i filosofi. Der findes også 'kunstnere' inden for matematikken, der bare 'kører derudaf'. Kreativitet kan give anledning til interessante ting, men de ville nok synes, 'Kimings skole' var for snæver. Der skal være plads til dem, de fleste er resultatorienterede."

Svaret må blive: "Sikkert, ja". Vi er dog ikke helt enige med Kiming i, at en sådan tilgang til matematikken bør anvendes generelt. I vores øjne er en sætning ikke nødvendigvis mere gyldig, fordi den hjælper os med beregninger, men diskussionen bliver hurtigt meget omfattende, for se f.eks. på Fermats sidste sætning. Denne sætning er fuldstændig ubrugelig i praksis, men alligevel har så mange matematikere prøvet at bevise den. På den anden side har de emner, man har måttet gennemgå for endelig at komme frem til beviset, affødt et væld at nye opdagelser og teorier, der har vist sig brugbare på mange områder.

Vi mener dog, som før nævnt, at Kimings synspunkter om moderne matematik er bredt gældende i den praktiske matematiske verden. Man kan så diskutere, om holdningerne er filosofisk acceptable, eller om man bare skal *komme videre i teksten.*

4 Fire eksempler på 'diskutable' beviser

Følgende fire beviser har givet anledning til diskussion i den matematiske verden, da de er blevet gennemført på knap så traditionelle metoder. Vi vil her forsøge at gengive problemerne i beviserne og kort redegøre for vores egen holdning til disse.

4.1 Klassificeringen af de endelige simple grupper

Først vil vi for god ordens skyld introducere den sætning, det hele drejer sig om [14]:

Sætning 1 (Klassifikation af endelige simple grupper)**.** *Lad G være en endelig simpel gruppe. Da er G isomorf med en af følgende grupper:*

1. *En cyklisk gruppe af primtalsorden, Z_p.*

2. En alternerende gruppe, A_n, for $n \geq 5$.

3. En klassisk lineær gruppe, $PSL(n,q)$, $PSU(n,q)$, $PSp(2n,q)$ eller $P\Omega^{\epsilon}(n,q)$.

4. En Lie-gruppe, ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(2^n)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(3^n)$ eller ${}^2B_2(2^n)$.

5. En af de sporadiske simple grupper: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} (Mathieu-grupperne); J_1, J_2, J_3, J_4 (Janko-grupperne); Co_1, Co_2, Co_3 (Conway-grupperne); HS, Mc; Suz (Co_1 "babyer"); Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24} (Fischer-grupperne); $F_1 = M$ (Monstergruppen); F_2, F_3, F_5, $He(= F_7)$ (Monster-"babyer"); Ru; Ly; ON.

Beviset for klassificeringen af de endelige, simple grupper består af en enorm samling af skrifter, hovedsageligt udgivet omkring 1955-1983. Værket omfatter mellem 10.000 og 15.000 sider fra artikler skrevet af cirka 100 forskellige personer i over 500 matematiske journaler.

Dette omfattende projekt fik sin begyndelse, da Brauer i 1954 gjorde den opdagelse, at der kun findes endelige grupper, hvis centralisator for en involution har en bestemt struktur. Herfra opstod ideen om at karakterisere simple grupper ud fra deres centralisator for en involution. Resultaterne skabte stor interesse, og andre kom med tilføjelser i form af fine resultater, hvoraf mange førte til opdagelsen af de såkalde sporadiske simple grupper. Brauer havde altså startet idéen om en total klassifikation af de endelige simple grupper. En idé der tiltalte mange, og i kraft af dette fik projektet stor tilslutning. [3]

I 1950'erne var projektet stadig ungt, og der var stadig meget arbejde, der skulle gøres. I 1960'erne skete en række banebrydende opdagelser, som viste sig meget nyttige for klassifikationsprojektet. Måske vigtigst af dem alle var det berømte Feit-Thompson theorem (1963), som siger, at alle grupper af ulige orden er opløselige. Som det skulle blive problemet med så mange andre dele af klassifikationen, er beviset for dette theorem 255 sider langt. Thompson er desuden også forfatter til et 410 siders bevis for klassifikationen af minimale simple grupper, hvilket tog seks år at lave (1968-1974). I 1965 lykkedes det Suzuki at karakterisere alle simple grupper, hvis centralisator for en involution har en normal Sylow-2-undergruppe. Også Gorenstein og Walter gjorde i 1965 opdagelser, hvor Sylow-2-undergrupper spillede en vigtig rolle, og i 1969 klassificerede Walters de simple grupper med abelske Sylow-2-undergrupper.

I begyndelsen af 1970'erne var der stadig ikke nogen systematiceret idé for, hvordan projektet skulle videreføres. Man havde igennem 1960'erne opdaget mange af de sporadiske simple grupper, og folk var begyndt at undre sig over, om der var uendeligt mange af disse. Gorenstein fremlagde så i 1972 sin 16-trins plan for, hvordan klassificeringsprojektet skulle fortsættes. Folk var dog i starten skeptiske, og dette specielt da Gorenstein fastslog, at færdiggørelsen af projektet ville komme til at tage omkring 30 år. Der kom imidlertid et gennembrud, da den unge matematiker Michael Aschbacher kom og beviste det ene banebrydende resultat efter det andet. Med hans tilføjelser kortede Gorenstein sin første 30 års forudsigelse ned til 10 år, og i januar 1981 blev klassifikationsprojektet færdiggjort [3], p51ff.

Spørgsmålet er nu, hvorvidt vi kan betragte dette projekt som et matematisk bevis. Der er talrige problemer og spørgsmål, man kan stille sig selv omkring klassifikationsprojektet. I kraft af, at det er så omfattende rent tekstmæssigt, vil man aldrig alene kunne danne sig et overblik over "beviset", måske end ikke nå at læse hele beviset selv. Der er også en konstant risiko for, at teksterne er fejlbehæftede, og netop fordi man ikke kan checke det hele igennem, har man ikke mulighed for at finde ud af, om dette er tilfældet. Beviset er altså ikke inspicerbart, hvilket Tymoczko kræver, for at det er gyldigt. Det er imidlertid meget sandsynligt. Igennem processen med klassifikationen har utallige forskellige forfattere med forskellig indgangsvinkel til problemet været involveret. Kan man da overhovedet sige, at de samlede tekster udgør et bevis som helhed? Gorenstein omtaler netop dette i nedenstående citat:

> "This is an appropriate moment to add a cautionary word about the meaning of 'proof' in the present context; for it seems beyond human capacity to present a closely reasoned several hundred page argument with absolute accuracy. I am not speaking of the inevitable typographical errors, or the overall conceptual basis for the proof, but of 'local' arguments that are not quite right—a misstatement, a gap, what have you. They can almost always be patched up on the spot, but the existence of such 'temporary' errors is disconcerting to say the least. Indeed, they raise the following basic question: If the arguments are often ad hoc to begin with, how can one guarantee that the 'sieve' has not let slip a configuration which leads to yet another simple group? Unfortunately, there are no guarantees—one must live with this reality. However, there is a prevalent feeling that, with so many individuals working on simple groups over the past fifteen years, and often from such different perspectives, every significant configuration will loom into view sufficiently often and so cannot remain unnoticed for long. On the other hand, it clearly indicates the strong need for continual reexamination of the existing 'proofs'.
> This will be especially true on that day when the final classification of simple groups is announced and the exodus, already begun, to more fertile lands takes place. Some of the faithful must remain behind to improve the 'text'. This will be one of the first major tasks of the 'post classification' era."
>
> - D.Gorenstein i [2], p389.

Man kunne spørge sig selv, om de tre skoler platonisme, intuitionisme og formalisme ville mene, at der her var tale om et matematisk bevis.

Platonisterne mener, at de matematiske entiteter eksisterer uafhængigt af os mennesker. Som nævnt tidligere går deres bevispraksis altså ud på at udlede sætninger ved hjælp af gyldige slutninger fra aksiomer, definitioner og tidligere viste sætninger. De ville altså mene, at sætningen om klassifikation af endelige simple grupper hele tiden har eksisteret, men at vi som matematikere først "opdagede"den fuldkomne version af den omkring år 1981. Processen, der førte til opdagelsen, er altså det matematiske bevis for sætningen. Men platonisterne mener jo også, at beviset skal udføres ved gyldige slutninger, og det er her, vi løber ind i problemer. Da vi ikke ved, om beviset er fejlbehæftet, kan vi ikke finde ud af, om det er den "rigtige"sætning, vi har opdaget. Muligvis er der en alvorlig fejl et sted, som endnu ikke er fundet, hvilket betyder, at sætningen, vi idag kender som sætningen om klassifikation af endelige simple grupper, måske er en sætning om noget helt andet. Er dette tilfældet, vil den rigtige sætning eksistere derude et sted, indtil vi finder fejlen.

Intuitionisterne (ifølge Brouwer) mener som bekendt, at matematikken kun består af de ting, man kan konstruere sig frem til gennem endelig tid, kun ved hjælp af tankens kraft. De beviser påstande ved at konstruere sig frem til dem. Begreber som uendeligheder er altså ikke gyldige i denne sammenhæng, da vi ikke lever længe nok til at konstruere os frem til for eksempel uendelige mængder. Netop det faktum, at beviset for klassifikationen af endelige simple grupper har det omfang, det nu engang har, udgør et problem for intuitionisterne. Forudsat at der ikke er fejl i beviset, vil man altså godt *i teorien* kunne konstruere sig frem til klassifikationen, hvorimod en enkelt person aldrig ville kunne nå det på en livstid. Her er der så uenighed inden for intuitionismens egne mure, Brouwer ville godtage beviset, hvorimod de rabiate ikke ville.

Formalisterne mener, at matematikken bare består af symboler og regler for deres inteferens. De ser på matematiske beviser som en slags spil, hvor de matematiske elementer er brikkerne, og spillets regler er lovene om logiske slutninger. Spillet følger altså nogle meget stramme regler for slutninger, og for hvordan de matematiske elementer forholder sig til hinanden. Vi løber her igen ind i problemet med, om hvorvidt der er fejl i det enorme bevis. En sætning er for formalisterne sand, hvis vi kan komme frem til den ved hjælp af logiske slutninger ud fra systemets aksiomer. Vi kan som formalister for det første ikke være sikre på, at alle har fulgt spillets regler til fulde, altså om der er småfejl rundt omkring i beviset, som gør, at der er draget logisk ugyldige slutninger undervejs. I kraft af at der er så mange spillere involveret, er vi heller ikke sikre på, at alle følger det samme sæt regler. Eller om alle spillerne har det samme mål med spillet. Før formalisterne overhovedet vil betragte beviset som et sådant, vil dette naturligvis kræve, at beviset er strengt formelt. Men da folk har haft forskellige intentioner med de forskellige dele af beviset, er der måske knap så meget tale om et samlet formelt bevis for klassifikationen.

Den generelle gennemgående problemstilling, vi løber ind i, er altså, om vi i det hele taget kan stole på dette bevis. Man bliver nødt til at beslutte sig for, om man vil sætte sin lid til dem, der må vide mest om dette bevisprojekt, nemlig dem der har gjort revisioner af det.

4.2 Fire-farve-sætningen

Fire-farve-sætningen har gennem lang tid irriteret matematikere verden over. Før den blev til en sætning, var den nærmere en formodning, der udsagde, at ethvert landkort kan farvelægges med højst 4 farver, så to nabolande ikke har samme farve. Formodningen var indtil for ganske nylig ubevist, men aldrig modbevist, hverken teoretisk eller empirisk. Ikke indtil Appel, Haken og Koch kom med et meget kontroversielt bevis for den i 1977, nemlig et bevis der gjorde brug af et reducibilitetslemma, der kun kunne eftervises ved hjælp af højhastigheds-computere, der så måtte arbejde uafbrudt i over 1200 timer for at løse problemet. [16]

Men hvorfor var beviset så så kontroversielt? For det første var fire-farve-sætningen (4FS) en af matematikkens store uløste gåder, som alle mente var sand, men som ingen kunne bevise. Alle mente dog, at der måtte findes et strengt formelt bevis for den, der var bare ingen, der var 'kloge nok' til at finde det. Der ses naturligt nok altid mere skeptisk på et påskud til et bevis for en stor klassisk sætning, ligesom der normalt vil være et større opbud af mulige "nedskydninger"af beviset. Men det er ikke her, det utraditionelle i Appel/Haken/Kochs bevis ligger, men mere i den computerassisterede del af beviset. De tre matematikere udviklede først en grundlæggende teori omkring problemet med formaliserede beviser for det meste *undtagen* det berygtede reducibilitetslemma, som man ikke kunne finde noget formelt bevis for, men som var ganske afgørende for 4FS som helhed. 4FS stod og faldt altså med dette lemma. Kort fortalt kunne man ved hjælp af lemmaet reducere interessen til at dreje sig om såkaldte konfigurationer af bestemte størrelser.

Moore havde konstrueret et kort, der viste, at det var uinteressant at kigge på konfigurationer mindre end 12, og her var man så gået i stå, indtil Appel/Haken/Koch kom med et sandsynlighedsteoretisk bevis for, at man med stor sandsynlighed også skulle kunne nøjes med at se på konfigurationer af størrelse mindre end 17, endda ville 14 være et godt bud. Men problemet bestod så stadig i, at man ikke var i stand til at gennemgå de mange millioner udregninger af mulige konfigurationer, der stadig skulle tjekkes for at bekræfte lemmaet. Dette skrev Koch så et computerprogram, der kunne gøre for dem. Computeren gav dem efter 1200 timers beregninger det svar, at reducibilitetslemmaet var sandt. Appel/Haken/Koch konkluderede heraf, at 4FS var sand, jævnfør deres netop opstillede bevis derfor. [16]

Og her kommer så balladen. Den del af beviset, der blev overladt til en computer, ville før i tiden aldrig være blevet godtaget af det matematiske samfund, specielt ikke af de ”ældre”og mere konservative matematikere. Men unge og mere åbne matematikere var villige til at diskutere denne helt nye måde at argumentere på. Man (Wang) havde før fået computere til at bevise simple regneregler indenfor aritmetikken, ligesom man havde kunnet programmere den til at udlede simple logiske slutninger, men man havde aldrig brugt en udregning fra en computer, som man ikke vidste, om var korrekt, til at slutte, at en bestemt sætning var sand eller ej. Problemet med sådanne slutninger er, at de bygger på beregninger, der ikke er mulige at gennemføre eller eftertjekke for den almindelige matematiker, de er altså ikke inspicerbare, jævnfør Tymoczkos tre kriterier. Beviset i sig selv er klart overbevisende, store dele af den matematiske verden har accepteret resultatet, og der er indtil videre ikke fundet nogle deciderede fejl eller modbeviser (der er dog stadig en større gruppe, der stiller spørgsmåltegn ved computerdelen og i særdeleshed det probabilistiske indhold i reducibilitetslemmaet). Problemet ligger som sagt i, at intet menneske vil kunne regne efter, hvad computerne brugte 1200 timer på, derfor kan man ikke med 100% nøjagtighed sige, at computeren har regnet rigtigt. Man er dog i stand til at opstille sandsynligheder for, om den gør det eller ej, og disse har vist sig at være kraftigt i computerens favør. Ligeledes er de algoritmer, computeren anvender til beregninger, blevet verificeret gang på gang uden at finde fejl. Men er beviset så formaliserbart? Dette spørgsmål er grund til stor debat, da computerdelen af beviset ikke i sig selv udgør et formelt bevis for 4FS; den antyder bare, at der må findes et, som vi bare ikke har kunnet finde endnu. Der findes ej heller beviser for, at 4FS rent faktisk har et formelt bevis. Men i realiteten er beviset for 4FS jo bare et induktionsbevis:

> ”It is a proof by induction which requires several cases. The first case is trivial, the second has several subcases and the third has over a thousand subcases most of which cannot be handled except by high-speed computers.”
>
> - Tymoczko, [16], p254

Men kan man så kalde beviset for 4FS for et egentligt bevis? Eftersom nogenlunde de fleste matematikere har accepteret beviset, skulle man jo mene, at så var den sag ude af verden, men deres arbejde har fået vidtrækkende konsekvenser for det matematiske paradigme:

> ”In fact, the Appel-Haken methodology suggests a new paradigm for mathematics. This paradigm includes the traditional elements of intuition and standard logic, as well as heuristic and probabilistic techniques combined with the high order computational abilities of a modern computer.”
>
> - Kainen/Saaty i [16], p264

Ovenstående citat fra Kainen/Saaty antyder også, at vi nødvendigvis må acceptere probabilistiske beviser i vores paradigme [4], som det Appel/Haken/Koch brugte til at indsnævre det interessante beregningsområde i reducibilitetslemmaet. Havde de ikke reduceret området til $12 \leq n \leq 17$, havde selv moderne computerkraft ikke kunnet magte opgaven. På den anden side giver dette et problem for f.eks. ontologiske realister og andre, der mener, at alt er enten sandt eller falsk, og sandsynligheder for sandhed er noget sludder.

Tymoczko mener ikke, at problemerne i kølvandet på 4FS vil ændre så meget på matematikken i sig selv, som den vil stille spørgsmål til filosofien. Det er vores mening i tråd med Tymoczko, at beviset for 4FS åbner for nye muligheder indenfor matematisk bevisførelse, men dog stadig begrænsede muligheder. Computere i dag kan trods alt kun udføre ting, vi beder dem om og har programmeret dem til. Først den dag, de udleder nye teoremer og viser os alternative retninger indenfor matematikken eller måske naturvidenskaben i det hele taget, vil vi for alvor kunne se potentialet i voldsom computerkraft. Indtil da kan vi fint anvende dem til (som f.eks. i beviset for 4FS) at tjekke en masse tilfælde efter, som vi mennesker aldrig ville komme igennem. [16], p260ff.

Intuitionister ville have delte meninger om dette "bevis". Brouwer selv ville nok være rimelig tilfreds, eftersom hele beviset jo *i teorien* er konstruerbart, selv computerens beregninger er det muligt (om end ikke indenfor én matematikers levetid) at efterprøve eller konstruere. Mere rabiate intuitionister vil beklage sig på dette punkt, da det for dem skal være muligt at konstruere matematiske beviser indenfor endelig tid. Begge lejre ville uanset hvad have svært ved at konstruere sig frem til det famøse interval, som det probabilistiske bevis giver.

Hvis en platonist godtog beviset, ville han være uenig med Tymoczko, der mener, beviset er a posteriori:

> "Moreover, it is unlikely that anyone could know the 4CT by reason alone. The only route to the 4CT that we can ever take appears to lead through computer experiments. Thus the 4CT is an a posteriori truth and not an a priori one; mathematicians, I suggest, will never know the 4CT by a priori means."
>
> - Tymoczko, [16], p261

På den anden side, skulle platonisten acceptere, at det var a posteriori viden, ville det i hans øjne ikke være et bevis. Her kommer netop problemerne med computeren ind i billedet, for en platonist ville næppe godtage, at en computer "erindrer"for én. Den computeriserede del af beviset giver ham ikke større indsigt i idéverdenen, den hjælper ham ikke til at generindre

[4]Et andet eksempel herpå er beviset for, at Riemann-formodningen er sand med sandsynlighed 1, som er beskrevet nærmere i afsnit 4.3

de ting, den regner ud for ham. Vi mener, denne holdning er gældende for langt de fleste moderne platonister.

Sidst men ikke mindst vil formalisten nok til dels klappe i sine små fedtede hænder af fryd, eftersom computerprogrammer er skrevet i formelle sprog, hvorimod resten af bevisets formalitet måske nok kan stilles en smule til nærmere granskning. Eksempelvis tager det probabilitiske bevis ikke verdens mest formelle standpunkt.

4.3 Riemann-formodningen

Riemann-formodningen er en af de mest kendte uafklarede formodninger indenfor matematik. Riemann-formodningen er en formodning om rødderne i zetafunktionen $\xi(z)$:

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Riemann formodede, at alle ikke-trivielle rødder havde en reel del, samt at denne del var $\frac{1}{2}$, med ikke-trivielle menes løsninger med et imaginært bidrag. Riemann-formodningen er altså, at alle nulpunkter for zetafunktionen, i den komplekse plan, vil være på en lodret linje af formen $\frac{1}{2} + it$, hvor $t \in \mathbb{R}$, og i er den komplekse enhed. [21] Til dels på grund af formodningen er zetafunktionen i dag en af de mest undersøgte funktioner. Det, der gør formodningen interessant, er ikke kun, at den ikke er løst, men også at den er brugt til flere beviser. Hvis det en dag bliver vist, at alle ikke-trivielle rødder ligger på linjen, vil det kunne give nogle mere præcise konklusioner om f.eks. fordelingen af primtal.

Man har som sagt ikke vist Riemann-formodningen, men der er lavet et argument for, hvorfor Riemann-formodningen passer. Det er Good og Churchhouses forklaring fra 1967, vi vil beskæftige os med. Til hjælp bruges Möbius-funktionen. Möbius funktionen $\mu(n)$ er defineret således:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{når } n = 1 \\ (-1)^r & \text{når } n = p_1 \cdots p_r \text{ er kvadratfri} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

F.eks. er primfaktoriseringen af $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ et produkt af 3 primtal, altså er $\mu(30) = (-1)^3 = -1$. Hvis man adderer værdierne for hver værdi mindre end eller lig med N, får man udtrykket $M(N)$.

$$M(N) = \sum_{n=1}^{N} \mu(n)$$

Det er blevet vist, at Riemann-formodningen er ækvivalent med følgende formodning: $M(N)$ vokser ikke hurtigere end en konstant gange $N^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ for N gående mod uendelig, hvor ϵ er vilkårlig men større end 0. Implikationen gælder begge veje.

Good og Churchhouses argumenter bygger på, at Möbius-funktionen skal være tilfældig, altså at der ikke er noget system i, hvornår funktionen taget på et tal bliver hhv. ± 1. De ser først på, hvornår $\mu(n) \neq 0$. Dette forekommer netop, når n ikke består af kvadrater, altså $2^2, 3^2, 5^2$ osv. Sandsynligheden, for at et tilfældig valgt tal ikke er et produkt af 4, er $\frac{3}{4}$, og ikke af 9 er det $\frac{8}{9}$, disse er helt uafhængige af hinanden, da vi ikke ved, om n er et produkt af 9, fordi vi ved, det ikke er et produkt af 4. Det er vist, at

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

Dermed har vi, at sandsynligheden, for at $\mu(n) = \pm 1$, er $\frac{3}{\pi^2}$, da de fremkommer lige hyppigt. Sandsynligheden for at få 0 må da være $1 - \frac{6}{\pi^2}$. $M(N)$ ville blive et meget stort tal hvis $\mu(n) = 1$ for hver værdi af n, men dette ville være meget usandsynligt, da ± 1 fremkommer lige ofte. Faktisk har Hausdorff vist, at hvis vi vælger N tilfældige tal med disse sandsynligheder, vil summen med sandsynlighed 1 ikke vokse hurtigere end en konstant gange $N^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ for $N \to \infty$. Dette var næsten, hvad vi skulle vise, der blev blot valgt N tilfældige tal i stedet for tallene fra 1 til N. [2]

Selve argumentationen åbner to klare spørgsmål: er Möbius-funktionen af et tilfældigt tal tilfældig? Og kan vi vælge N forskellige tal i stedet for 1 til N? Det første spørgsmål en egentlig et klart nej, da Möbius-funktionen af ethvert tal vil give en eksakt værdi. Omvendt kan man sige, at der ikke er noget bestemt system i, hvornår $\mu(n)$ er positiv, og hvornår den er negativ. Det andet spørgsmål går lidt på det samme, altså vores billede af Möbius-funktionen og om hvorvidt den er tilfældig eller ej. Denne umiddelbare opfattelse af Möbius funktionen som tilfældig skyldes nok, at det passer på mange eksempler, f.eks. er antallet af led, hvor $\mu(n) = 0$ i M(33.000.000)=12.938.407, hvor 33.000.000 $\cdot \left(1 - \frac{6}{\pi^2}\right) =$ 12.938.405. Hvis man havde set dette resultat ud fra et fysisk synspunkt, så var det et godt resultat, altså teorien må være rigtig. Man må altså sige at argumentationen er overbevisende. Hvis man ser det ligesom Thomas Tymoczko, er det punktet, om beviset er inspicerbart, som volder problemer. Som vi allerede har været inde på, er der flere trin, der nok er overbevisende men ikke inspicerbare, og flere af argumenterne er ikke a priori.

Men hvis vi vælger at tro på "beviset", så følger det altså, at Riemannformodningen er sand med sandsynlighed 1, og hvad vil det sige? Riemannformodningen er ikke nogen tilfældig variabel, men enten sand eller falsk, ikke sandsynligvis sand. Konklusionen ville i givet fald være, at alle ikke trivielle rødder i $\xi(z)$ med sandsynlighed 1 kan skrives på formen $\frac{1}{2} + it$; det giver ikke mening. Når det alligevel virker overbevisende, skyldes det den grundige og overskuelige gennemgang, samt at det giver det ønskede resultat.

Hvis man skal se lidt på, hvordan de 3 skoler ville se på dette, tror vi, ingen af dem ville kalde det et bevis. Nærmest ville være platonisterne, men da det ikke er a priori, ville mange nok forkaste det. Det, der kunne tiltale platonisterne, ville i høj grad være, at vi kunne estimere $M(33.000.000)$ meget præcist, altså at der er en overraskende nøjagtige sammenhæng mellem det tænkte, og hvordan det faktisk forholdte sig. Denne regularitet mellem verden og teorien ville være bevis nok for en del.

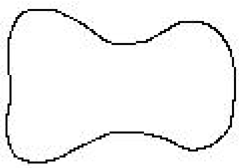
For en intuitionist eller en formalist ville det ikke være i nærheden af at være et bevis. Formalisten og måske også intuitionisten ville nok se på det som et gæt, noget man måske ville komme frem til en gang efter udledninger, men da det ikke direkte bygger videre på nogen sætning eller noget af det kendte, er det ikke et bevis. En del af "beviset"bygger på, at Möbiusfunktionen skulle være tilfældig, hvilket er et problem. Hvordan skulle vi kunne konstruere noget, der skulle være tilfældigt, og hvad vil det da sige? Dette er altså ikke noget, som hverken vi eller ret mange andre vil anerkende som et bevis. Dette gælder også for Good og Churchhouse, der skriver følgende om deres målsætning for deres forklaring:

> "The aim of their own work is to suggest a 'reason' (their quotation marks) for believing Riemann's hypothesis."
>
> \- [2], p.364

4.4 Jordans kurvesætning

Sætning 2 (Jordans Kurvesætning)**.** *En simpel, lukket kurve i planen deler planen i to: En endelig og en uendelig del.*

Bevis. Sætningen fremgår klart af nedenstående figur.



□

Blandt de sætninger, der er nemme at formulere, men svære at bevise, finder vi Jordans Kurvesætning. Den beskriver noget, der intuitivt er åbenlyst korrekt, og i kraft af dette er det de færreste, der tvivler på rigtigheden af udsagnet. Sætningen blev første gang foreslået som sætning af Camille Jordan (1838-1922) i hans *Course d' Analyse*, 1887. Den udtaler sig om noget, der hidtil havde været en selvfølge for enhver. Jordan fremsatte selv et omend elegant dog ugyldigt bevis, og først i 1905 lavede Oswald Veblen det første gyldige bevis for sætningen. Undertiden har der været en lang række beviser for sætningen, udført af mere eller mindre berømte matematikere. [7] [4] For eksempel har et avanceret computerprogram, udviklet gennem et samarbejde mellem Japan og Rusland, for nyligt færdiggjort et bevis for sætningen, der strækker sig over 3000 sider efter 14 års beregninger. [20]

Vi skal imidlertid ikke diskutere beviser som disse, men det bevis der er givet ovenfor. Beviset bygger på ren intuition, hvor billedets rolle blot er at få læseren til at indse rigtigheden af sætningen. Men man kan spørge sig selv, om hver enkelt person ser det samme, når de betragter billedet.

"Beauty is in the eye of the beholder."

-Platon

Efter vores mening ville ingen af de tre skoler nok godtage denne form for bevis. Selv Lakatos ville vende sig i sin grav, hvis han blev bedt om at godtage dette bevis. For ham ville der ikke være nogen punkter i beviset, der kunne angribes, derfor vil hans modeksempel-metode ikke kunne bruges til noget.

Den, der skulle komme tættest på, ville nok være Platon, selvom vi bestemt ikke er overbevist om, at han vil synes, man generindrer specielt godt ved hjælp af tegningen. Han vil muligvis kunne se en sandhed fra idéverdenen, men hvordan han forholder sig til billedets status som bevis, er svært at sige.

Hilbert vil ikke kunne finde mange matematiske symboler at rode rundt med, beviset er fuldstændig forladt for symboler, begreber og definitioner, han ville kunne formalisere ud fra billedet.

Brouwer vil heller ikke kunne se nogen som helst form for fremgangsmåde til at konstruere sig frem til en sådan tegning i beviset. Desuden vil alle skoler nok beklage sig over, at tegningen "viser"sætningen for én bestemt kurve, men overhovedet ikke udtaler sig om alle kurver generelt, ligesom sætningen gør.

Efter vores mening er der ikke så meget at sige til dette bevis, udover at der er tale om en meget diskutabel og ikke særlig fyldig gennemgang af en sætning, der er så åbenlys, at man nærmest ikke behøver et bevis. Men denne udgave er efter vores mening bestemt ikke et bevis: den gør ikke brug af nogen som helst form for antagelser (hvad er der blevet af ordene 'simpel', 'lukket' og 'kurve'?), og beviset er ikke specielt formaliserbart. Man kan højest bruge det som et intuitivt argument for sætningen.

5 Konklusion

Vi har gennem dette projekt set på forskellige skolers opfattelse af matematiske beviser og relateret deres holdninger til fire eksempler på såkaldt 'diskutable' beviser. I to tilfælde kunne beviserne betragtes som værende ugyldige. De andre to må siges at kunne diskuteres (hvilket de til stadighed bliver i matematikverdenen i dag!), men konklusionen må blive, at de tre skoler - selvom de stadig har tilhængere i dag - er forældede, og der vil være behov for revisioner i matematikeres opfattelse af et bevis, for at matematikken kan blive ved med at udfolde sig og udvikle dens kunnen og brugbarhed.

Vi så ligeledes på et eksempel fra hverdagens matematik, hvor Ian Kiming præsenterede os for en helt ny skole, den beregningsmæssige skole, der fokuserer på matematik, der kan bruges til noget. Denne skole er muligvis også grundlaget for langt de fleste nutidige matematikeres arbejdsgang, selvom de måske ikke vil stå ved det.

Skal vi prøve at konkludere på, hvad *vi* mener, er et acceptabelt matematisk bevis, må vi fremhæve Tymoczkos tre kriterier: overbevisende, inspicerbare og formaliserbare. Disse giver efter vores mening et meget godt udgangspunkt for at klassificere et gyldigt matematisk bevis. Punkt to skal dog defineres til at gælde *i teorien* og ikke kun i endelig tid. Dette vil f.eks. medføre acceptans af fire-farve-sætningen i vores øjne, måske bortset fra den probalistiske del, der stadig vil kunne stå til diskussion.

Litteratur

[1] Michael Aschbacher: *The Status of the Classification of Finite Simple Groups*, Notices of the AMS Vol. 51, nr. 7.

[2] Philip Davis & Reuben Hersh: *The Mathematical Experience*, Boston: Birkhäuser, 1980.

[3] Faun C.C. Doherty: *A History of Finite Simple Groups*, Oberlin College, 1993.

[4] Milos Dostal & Ralph Tindell: *The Jordan Curve Theorem Revisited*, http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/jordan/dosttind.pdf

[5] Gorenstein/Lyons/Solomon: *The Classification of the Finite Simple Groups*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 40.1, AMS.

[6] Imre Lakatos: *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976.

[7] John McCleary: Kap 9. *The Jordan Curve Theorem*, http://math.vassar.edu/faculty/McCleary/FinalChapter9.pdf

[8] Terese M. O. Nielsen: *Matematisk realisme, "indispensability"og objekt- og vidensbegreber*, http://www.ivh.au.dk/hosta/hosta006.pdf

[9] Platon: *Menon* (uddrag).

[10] Stewart Shapiro: *Thinking About Mathematics*, Oxford University Press, 2000.

[11] Stephen G. Simpson: *Partial Realizations of Hilbert's Program*, Journal of Symbolic Logic, Vol. 53, p349-363, 1988.

[12] Ole Skovsmose: *Ud over matematikken*, Systime, 1990.

[13] Ernst Snapper: *The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism*, Mathematics Magazine 52

[14] Ron Solomon: *On Finite Simple Groups and Their Classification*, Notices of the AMS, Feb. 1995.

[15] Ronald Solomon: *A Brief History of the Classification of the Finite Simple Groups*, Bulletin of the AMS Vol. 38, nr. 3, p315-352, 2001.

[16] Thomas Tymoczko: *The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance*, her fra *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, 1986.

[17] Richard Zach: *Hilbert's Program*, fra Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/

[18] Richard Zach: *Hilbert's Program Then and Now*,
http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00002547/01/hptn.pdf

[19] BookRags.com artikelbase,
http://www.bookrags.com/sciences/mathematics/

[20] Mathworld om Jordans kurvesætning,
http://mathworld.wolfram.com/JordanCurveTheorem.html

[21] *The Riemann Hypothesis in a Nutshell*,
http://web.mala.bc.ca/pughg/RiemannZeta/RiemannZetaLong.html

[22] Romantikken - Noter, Espergærde Gymnasium & Hf,
http://www.da-net.dk/romantiknoter.html

[23] Non-Euclidian Geometry,
http://non-euclidean-geometry.ask.dyndns.dk